mgr Katarzyna Miś
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Katowice, 25 lutego 2020 roku

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Uogólnione schematy i reguły wnioskowania w logice rozmytej

Wnioskowanie przybliżone (ang. *approximate reasoning*) ma obecnie duże znaczenie w praktyce, gdyż pozwala na uzyskanie konkretnych wniosków na podstawie nieprecyzyjnych danych. Znajduje ono zastosowanie w takich dziedzinach nauki jak: teoria decyzji, analiza ryzyka, sterowanie rozmyte czy eksploracja danych. W logice klasycznej najczęściej wykorzystywaną regułą wnioskowania jest reguła modus ponens (podkreślmy, że w rozprawie używamy w tym przypadku określenia schemat wnioskowania), którą możemy zapisać następująco:

$$\frac{A \to B \ \wedge \ A}{\therefore \quad B}$$

Jego uogólnioną wersję możemy natomiast przedstawić w następujący sposób:

REGUŁA:	JEŻELI x jest A,	TO y jest B.
OBSERWACJA:	x jest A'.	
WNIOSEK:		y jest B'.

Widzimy, że obiekty x, y mają przyporządkowane pewne własności A, B oraz A', B'. Zazwyczaj w zastosowaniach praktycznych elementy pary (A, A') nieznacznie różnią się od siebie i tego samego wymagamy na wyjściu od pary (B, B'). We wnioskowaniu przybliżonym opartym na logice rozmytej własności A, A', B, B' są reprezentowane przez zbiory rozmyte. Wartości wyjściowe B' możemy obliczyć korzystając z pewnych reguł wnioskowania, zazwyczaj z użyciem reguły złożeniowej Zadeha (ang. *Compositional Rule of Inference, CRI*, zob. [9]) lub iloczynu Bandlera-Kohouta (ang. *Bandler-Kohout Subproduct, BKS*, zob. [2]). Dla wspomnianego uogólnionego schematu modus ponens wzory pozwalające obliczyć stosowne wartości wniosku wyglądają następująco:

$$B'(y) := \sup_{x \in X} T(A'(x), I(A(x), B(y))), \quad y \in Y,$$

$$B'(y) := \inf_{x \in X} I(A'(x), T(A(x), B(y))), \quad y \in Y,$$

gdzie T jest t-normą (lub pewnym uogólnieniem klasycznej koniunkcji), a I jest implikacją rozmytą (lub pewnym uogólnieniem klasycznej implikacji).

Jedną z podstawowych własności oczekiwanych od takich reguł wnioskowania jest własność interpolacji, czyli spełnianie klasycznej wersji schematu modus ponens:

$$B(y) = \sup_{x \in X} T(A(x), I(A(x), B(y))), \quad y \in Y.$$

Przechodząc z wartościami zbiorów rozmytych na cały odcienk $[0,1]$ otrzymujemy następujące równania funkcyjne:

$$y = \sup_{x\in[0,1]} T(x, I(x,y)), \tag{CRI-GMP}$$

$$y = \inf_{x\in[0,1]} I(x, T(x,y)), \tag{BK-GMP}$$

które powinny być spełnione dla wszystkich $y \in [0,1]$.

W pracy, oprócz powyższych równań, badamy także uogólnienia trzech innych klasycznych schematów wnioskowania:

(i) sylogizmu hipotetycznego

$$\frac{A \to B \ \wedge \ B \to C}{\therefore \qquad A \to C}$$

(ii) schematu modus tollens

$$\frac{A \to B \ \wedge \ \neg B}{\therefore \quad \neg A}$$

(iii) prawa redukcji do absurdu

$$\frac{\neg A \to B \ \wedge \ \neg B}{\therefore \quad A}$$

Dla tych schematów wnioskowania zastosowanych do naszych dwóch reguł wnioskowania (CRI i BKS) otrzymujemy kolejno poniższe równania funkcyjne:

$$I(x,y) = \sup_{z\in[0,1]} \left(T(I(x,z), I(z,y))\right), \quad x,y \in [0,1], \tag{CRI-GHS}$$

$$I_2(x,y) = \inf_{z\in[0,1]} I_1(T(x,z), T(z,y)), \quad x,y \in [0,1], \tag{BK-GHS}$$

$$N(x) = \sup_{y\in[0,1]} T(N(y), I(x,y)), \quad x \in [0,1], \tag{CRI-GMT}$$

$$N(x) = \inf_{y\in[0,1]} I(N(y), T(x,y)), \quad x \in [0,1], \tag{BK-GMT}$$

$$x = \sup_{y\in[0,1]} T(N(y), I(N(x),y)), \quad x \in [0,1], \tag{CRI-GRA}$$

$$x = \inf_{y\in[0,1]} I(N(y), T(N(x),y)), \quad x \in [0,1], \tag{BK-GRA}$$

gdzie T jest t-normą, I, I_1, I_2 są implikacjami rozmytymi, a N jest negacją rozmytą. Ponadto, rozważamy także następujące nierówności funkcyjne, otrzymane dzięki działaniom kratowym w algebrze Boole'a, a dalej rozszerzając je na spójniki rozmyte:

$$T(x, I(x,y)) \leqslant y, \quad x,y \in [0,1], \tag{MP}$$

$$T(I(x,z), I(z,y)) \leqslant I(x,y), \quad x,y,z \in [0,1], \tag{HS}$$

$$T(N(y), I(x,y)) \leqslant N(x), \quad x,y \in [0,1], \tag{MT}$$

$$T(N(y), I(N(x),y)) \leqslant x, \quad x,y \in [0,1]. \tag{RA}$$

Dotychczas badania były prowadzone głównie dla uogólnionego schematu modus ponens (zob. [7]), sylogizmu hipotetycznego (pierwsze badania pod koniec ubiegłego wieku, zob. [4]) oraz nierówności (HS), (MP), (MT), (RA) (zob. [8]).

Układ rozprawy jest następujący. Po przedstawieniu najważniejszych pojęć w teorii zbiorów rozmytych (Rozdział 1), omawiamy główne założenia wnioskowania przybliżonego (Rozdział 2). W głównej części rozprawy rozważamy wspomniane równania i nierówności funkcyjne przy ustalonej jednej funkcji – najczęściej t-normy T (lub semikopuły, czy innego uogólnienia klasycznej koniunkcji). Prezentujemy zatem rozwiązania dla wybranych rodzin implikacji rozmytych. Rozdział 3 został poświęcony sylogizmowi hipotetycznemu, a dokładniej rozwiązaniom (CRI-GHS), (BK-GHS) oraz (HS), a także wybranym algebraicznym własnościom złożenia $\sup -T$. Rozdział 4 zawiera wyniki dotyczące rozwiązań (CRI-GMP), (BK-GMP) oraz (MP). W Rozdziale 5 znalazły się analogiczne fakty dotyczące (CRI-GMT), (BK-GMT) oraz (MT). W Rozdziale 6 opisane zostały rozwiązania (CRI-GRA), (BK-GRA) oraz (RA). W krótkim Rozdziale 7 przedstawiamy uwagi dotyczące możliwych innych równań funkcyjnych uzyskanych przy różnych kombinacjach reguł wnioskowania i relacji rozmytych. Ostatni Rozdział 8 został poświęcony innej metodzie wnioskowania – wnioskowaniu opartemu na podobieństwie. Podane też zostały pewne uwagi dotyczące dwóch głównych strategii wnioskowania FITA (*First Infer Then Aggregate*) i FATI (*First Aggregate Then Infer*) w kontekście uzyskanych wyników.

Część z rezultatów przedstawionych w pracy doktorskiej została już opublikowana w recenzowanych artykułach konferencyjnych powstałych we współpracy z M. Baczyńskim i P. Helbinem [3, 6] oraz opracowanych z M. Baczyńskim [1, 5].

Literatura

[1] M. Baczyński and **K. Miś**. Selected Properties of Generalized Hypothetical Syllogism Including the Case of R-implications. In J. Medina et al., editor, *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Theory and Foundations*, volume 853, pages 673–684. Springer, 2018.

[2] W. Bandler and L. Kohout. Semantics of implication operators and fuzzy relational products. *Int. J. Man-Machines Studies*, pages 89–116, 1980.

[3] P. Helbin, **K. Miś**, and M. Baczyński. Some Remarks on Generalized Hypothetical Syllogism and Yager's Implication. In R. Halaš, M. Gagolewski, and R. Mesiar, editors, *New Trends in Aggregation Theory*, pages 129–139. Springer International Publishing, 2019.

[4] G. J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications.* Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[5] **K. Miś** and M. Baczyński. Different Forms of Generalized Hypothetical Syllogism with Regard to R-Implications. In L. Rutkowski et al., editor, *Artificial Intelligence and Soft Computing*, volume 11508, pages 304–313. Springer, 2019.

[6] **K. Miś**, M. Baczyński, and P. Helbin. Some Remarks on the Generalized Scheme of Reduction to Absurdity and Generalized Hypothetical Syllogism in Fuzzy Logic. In *2019 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2019)*, pages 423–429. Atlantis Press, 2019.

[7] E. Trillas, C. Alsina, and A. Pradera. On MPT-implication functions for fuzzy logic. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM.*, 98(1):259–271, 2004.

[8] E. Trillas, C. Alsina, and E. Renedo. On some schemes of reasoning in fuzzy logic. *New Math. Nat. Comput.*, 7(3):433–451, 2011.

[9] L. A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. on Syst. Man and Cyber.*, 3:28–44, 1973.