mgr Marta Walczyńska
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Katowice, 12 lutego 2018 r.

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Zastosowania teorii kategorii w topologii ogólnej

Niniejsza rozprawa omawia niektóre pojęcia teorii kategorii w zastosowaniu do topologii ogólnej oraz bada do jakiego stopnia rozumowania wykorzystujące te pojęcia mogą zastąpić metody tradycyjne. Jednym z ważniejszych przykładów jest pojęcie ciągu Fraïsségo, którego zastosowania przedstawione zostały w pracach [3], [4] oraz [5].

Wiele przykładów kategorii to obiekty algebraiczne: grupy, grupy abelowe, monoidy wraz z homomorfizmami grup, grup abelowych oraz monoidów odpowiednio. Przykładem monoidu składającego się z operacji topologicznych jest monoid Kuratowskiego opisany w artykule [6].

Rozprawa jest zorganizowana następująco. W podrozdziale 1.2.1 komentujemy sposoby wykorzystania pojęć takich jak drzewo, przestrzeń gałęzi, ultrametryka itp., itd.

W rozdziale 2 podajemy aksjomaty kategorii, podstawowe definicje, oznaczenia i przykłady. Zwracamy uwagę na szczególny funktor kowariantny jakim jest *diagram*.

Rozdział 3 zaczynamy od przypomnienia podstawowych idei dotyczących granicy ciągu odwrotnego. Następnie przeprowadzamy analizę dowodu twierdzenia Knastera–Reichbacha mówiącego o przedłużaniu odwzorowań między podzbiorami domkniętymi nigdziegęstymi zbioru Cantora oraz jego wariant dla przestrzeni metrycznych rozproszonych oraz zwartych. Podrozdział 3.3 zawiera kilka rezultatów z pracy [7], w której, mimo iż, nie powołujemy się wprost na teorię kategorii, badana jest kategoria przestrzeni metrycznych σ-dyskretnych z zanurzeniami w roli morfizmów.

W rozdziale 4 koncentrujemy się na *Cantorvale symetrycznym.* Jest to jedna — obok zbioru Cantora oraz sumy rodziny skończonej złożonej z przedziałów domkniętych — z możliwych postaci zbioru podsum szeregu zbieżnego o wyrazach dodatnich. Rezultaty, które powstały, są opublikowane w artykule [1] a ich obszerne streszczenie jest zamieszczone jako podrozdział 4.1. W nim, podobnie jak w podrozdziale 4.2, gdzie prezentujemy pochodzące z pracy [1] uogólnienie twierdzenia J. von Neumanna, stosujemy metodę dowodu znaną pod nazwą „argument tam i z powrotem" (ang. *back-and-forth*). Metoda ta okazała się być użyteczna w dowodach własności obiektów uniwersalnych jednorodnych, czyli tzw. granic Fraïsségo, o czym przekonujemy się w kolejnych rozdziałach tej rozprawy.

W rozdziale 5 przypominamy pojęcia amalgamacji oraz amalgamacji odwrotnej a także ich szczególne przypadki — *pushout* oraz *pullback* odpowiednio. Omawiamy te pojęcia w dwóch szczególnych kategoriach: **Set** czyli kategorii, której obiektami są zbiory a strzałkami funkcje oraz

Top czyli kategorii, której obiektami są przestrzenie topologiczne a strzałkami przekształcenia ciągłe.

W rozdziale 6 prezentujemy główną ideę tej rozprawy czyli ciągi Fraïsségo: definicję, kryterium istnienia oraz własności. W podrozdziale 6.2 koncentrujemy się na kategorii $\mathbf{Finset}^{\mathrm{op}}/A$ czyli pewnej kategorii przecinkowej (ang. *comma category*) związanej z kategorią odwrotną do kategorii **Finset**.

W rozdziale 7 omawiamy strukturę oraz podstawowe fakty dotyczące granic Fraïsségo w kontekście ciągów odwrotnych. Pokazujemy w jaki sposób własność *uniwersalności projektywnej* oraz własność *jednorodności projektywnej* łączą się z pojęciem obiektu *generycznego* (dla odpowiedniej podkategorii).

W rozdziale 8 zebrane są komentarze, które w przyszłości zostaną uwzględnione w artykułach wspólnych z promotorami a dotyczą m.in. kategorii zbiorów skończonych niepustych oraz jej liniowego wariantu. Stwierdzamy, że na zbiorze Cantora istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna, która jest silnie dodatnia, przyjmuje wartości wymierne na zbiorach domknięto-otwartych i spełnia pewien warunek jednorodności.

Literatura

[1] W. Bielas, Sz. Plewik oraz M. Walczyńska, *On the center of distances*, European Journal of Mathematics, DOI: 10.1007/s40879-017-0199-4 lub arXiv: 1605.03608v2.

[2] W. Kubiś, *Fraïssé sequences: category-theoretic approach to universal homogeneous structures*, Ann. Pure Appl. Logic 165 (2014), 1755–1811.

[3] W. Kubiś, *Injective objects and retracts of Fraïssé limits*, Forum Math. 27 (2015), 807–842.

[4] W. Kubiś, *Banach–Mazur game played in partially ordered sets.* Algebra, logic and number theory, Banach Center Publ., 108, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, (2016), 151–160.

[5] W. Kubiś oraz A. Kwiatkowska *The Lelek fan and the Poulsen simplex as Fraïssé limits*, RACSAM. (2017).

[6] Sz. Plewik oraz M. Walczyńska, *The Monoid Consisting of Kuratowski Operations*, Journal of Mathematics (2013), 1–9.

[7] Sz. Plewik oraz M. Walczyńska, *On metric σ-discrete spaces*, Algebra, logic and number theory, 239–253, Banach Center Publ., 108, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, (2016), 239–253.