Autoreferat

- Imię i nazwisko: **Adam Woryna**.
- Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:
  - magister inżynier matematyki, Politechnika Śląska, Wydział Matematyczno-Fizyczny, specjalność: Matematyka dyskretna i matematyczne podstawy informatyki, temat pracy magisterskiej: *Teoria prezentacji grup*, promotor: prof. dr hab. Olga Macedońska, 03/2001,
  - doktor matematyki, Uniwersytet Śląski, Wydział Matematyczno-Fizyczno-Chemiczny, Instytut Matematyki, temat pracy doktorskiej: *Automaty Mealy'ego zmienne w czasie i grupy generowane przez te automaty*, promotor: prof. dr hab. Witalij Suszczański, 06/2005,
- Dotychczasowe zatrudnienie: od lutego 2006 roku adiunkt na Wydziale Matematyki Stosowanej w Zakładzie Algebry Politechniki Śląskiej w Gliwicach.
- Osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi jednotematyczny cykl publikacji pod tytułem:

Automaty przetworniki a topologiczne generowanie splotów grup.

Lista publikacji wchodzących w skład ww. osiągnięcia:

[H1] A. Woryna, *The rank and generating set for iterated wreath products of cyclic groups*, Communications in Algebra, 39 (7) (2011), 2622–2631; IF 0.347,

[H2] A. Woryna, *The rank and generating set for inverse limits of wreath products of Abelian groups*, Archiv der Mathematik, 99 (6) (2012), 557–565; IF 0.376,

[H3] A. Woryna, *The topological decomposition of inverse limits of iterated wreath products of finite Abelian groups*, Forum Mathematicum, 25 (6) (2013), 1263-–1290; IF 0.733,

[H4] A. Woryna, *The automaton realization of iterated wreath products of cyclic groups*, Communications in Algebra, 42 (3) (2014), 1354–1361; IF 0.388,

[H5] A. Woryna, *On the automaton complexity of wreath powers of non-abelian finite simple groups*, Journal of Algebra, 405 (2014), 232–242; IF 0.599,

[H6] A. Woryna, *On some universal construction of minimal topological generating sets for inverse limits of iterated wreath products of non-Abelian finite simple groups*, Journal of Algebraic Combinatorics, 42 (2) (2015), 365-–390; IF 0.874,

[H7] A. Woryna, *The Characterization by Automata of Certain Profinite Groups*, Journal of Pure and Applied Algebra, 219 (5) (2015), 1564–1591; IF 0.669,

[H8] A. Woryna, *On amenability of groups generated by homogeneous automorphisms and their cracks*, Forum Mathematicum, 28 (6) (2016), 1205–1213; IF 0.755.

Spis treści

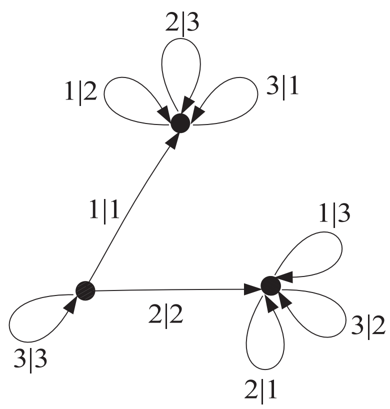
1 Opis dziedziny i motywacja

1.1 Automaty przetworniki i grupy automatowe

Automat przetwornik w klasycznej wersji (tzw. automat Mealy'ego) można sobie wyobrazić jako graf skierowany o skończonym zbiorze wierzchołków S (zbiór stanów automatu), w którym każda krawędź jest oznakowana parą postaci $x|y$, gdzie x i y to elementy (litery) z ustalonego, skończonego i niepustego zbioru X (alfabetu). Wyruszając z jakiegoś wierzchołka $s \in S$, dowolna skończona wędrówka wzdłuż krawędzi grafu (zgodnie z ich kierunkiem) definiuje w sposób naturalny pewien skończony ciąg par

$$x_1|y_1,\ x_2|y_2,\ \dots, x_n|y_n,$$

gdzie $x_i, y_i \in X$ dla $1 \leq i \leq n$. Powiemy wówczas, że w wędrówce tej słowo $w := x_1 \dots x_n$, zbudowane z kolejnych poprzedników tych par (tzw. liter na wejściu) przechodzi na słowo $v := y_1 \dots y_n$, zbudowane z kolejnych następników (liter na wyjściu) lub też, że automat, będąc w stanie s i odczytując na wejściu słowo w, wypisuje na wyjściu słowo v. W dalszym ciągu mówiąc „automat", będziemy mieć na myśli automat permutujący, czyli taki graf, że z każdego jego wierzchołka wychodzi dokładnie $|X|$ krawędzi (wychodzących) i każdy z dwóch zbiorów liter przy tych krawędziach wychodzących (tj. zbiór liter na wejściu oraz zbiór liter na wyjściu) wyczerpuje cały alfabet. W szczególności dla dowolnego stanu $s \in S$ i dowolnego słowa w



Rysunek 1: automat minimalny generujący nieskończoną 3-grupę

nad alfabetem X istnieje dokładnie jedna droga skierowana o początku w stanie s, na której kolejne litery na wejściu układają się w słowo w, a kolejne litery na wyjściu – w pewne słowo tej samej długości co w. Dowolny stan automatu definiuje więc pewne przekształcenie zbioru X^* wszystkich skończonych słów nad alfabetem X. Przekształcenie to można opisać poprzez funkcję przejść $\varphi\colon S \times X \to S$ i funkcję wyjść $\psi\colon S \times X \to X$, które definiują automat jednoznacznie i opisują go jego maszynę, która będąc w stanie $s \in S$ i odczytując na wejściu literę $x \in X$, przechodzi do stanu $\varphi(s, x)$ i wypisuje na wyjściu literę $\psi(s, x)$. Automat taki będziemy oznaczać jako czwórkę

$$A = (S, X, \varphi, \psi).$$

Wówczas dla każdego stanu $s \in S$ obraz dowolnego niepustego słowa $w = x_1 \dots x_n$ przy przekształceniu $\widetilde{s}\colon X^* \to X^*$ definiowanym przez stan s można wyznaczyć następująco:

$$\widetilde{s}(w) = \psi(s_1, x_1) \dots \psi(s_n, x_n),$$

gdzie ciąg stanów $s_1, \ldots, s_n$ jest zdefiniowany rekurencyjnie: $s_1 := s$, $s_{i+1} := \varphi(s_i, x_i)$ dla $1 \leq i \leq n-1$. Przyjmujemy również $\widetilde{s}(\epsilon) := \epsilon$, gdzie ϵ oznacza słowo puste (ciąg liter długości zero).

Założenie, że automat $A = (S, X, \varphi, \psi)$ jest permutujący, implikuje, że przekształcenia $\widetilde{s}$ ($s \in S$) są permutacjami zbioru X^*, czyli $\widetilde{s} \in Sym(X^*)$. Bezpośrednio z konstrukcji tych przekształceń wynika, że zachowują one długości oraz początki słów, tzn. dla dowolnych $w, v \in X^*$ mamy: $|\widetilde{s}(w)| = |w|$, a jeżeli słowa w i v mają wspólny początek (prefiks) danej długości, to ich obrazy $\widetilde{s}(w)$ i $\widetilde{s}(v)$ również mają wspólny prefiks tej długości.

Przekształcenie $f\colon X^* \to X^*$, dla którego można skonstruować automat Mealy'ego $A = (S, X, \varphi, \psi)$ taki, że $f = \widetilde{s}$ dla pewnego stanu $s \in S$, będziemy nazywać przekształceniem automatowym nad alfabetem X. Zbiór wszystkich przekształceń automatowych nad alfabetem X będziemy oznaczać przez $\mathcal{MA}(X^*)$. Złożenie przekształceń automatowych, a także przekształcenie odwrotne do przekształcenia automatowego, również jest przekształceniem automatowym. W szczególności $\mathcal{MA}(X^*) \leq Sym(X^*)$. Dowolna podgrupa $G \leq \mathcal{MA}(X^*)$ jest nazywana grupą automatową. Dla pojedynczego automatu Mealy'ego $A = (S, X, \varphi, \psi)$ grupa generowana przez przekształcenia $\widetilde{s} \in Sym(X^*)$ dla $s \in S$ jest nazywana grupą generowaną przez ten automat i oznaczana przez $G(A)$:

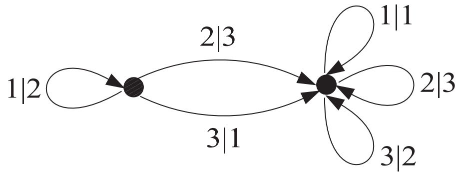
$$G(A) := \langle \widetilde{s} \colon s \in S \rangle.$$

Zatem grupa $G(A) \leq \mathcal{MA}(X^*)$ jest przykładem skończenie generowanej grupy automatowej.

Pojęcie grupy automatowej wprowadził V. M. Glushkov ([28]) w 1961 roku, wysuwając przypuszczenie, że można uzyskać w ten sposób nieskończoną grupę torsyjną, która jest skończenie generowana, czyli grupę rozwiązującą słynny problem Burnside'a z 1902 roku. Zostało ono potwierdzone w 1972 roku przez S. V. Aleshina ([1]), który dla każdej liczby pierwszej $p \geq 2$ skonstruował nieskończoną p-grupę, generowaną przez dwa przekształcenia automatowe, zdefiniowane przez dwa stany pewnych dwóch automatów nad alfabetem p-literowym, z których jeden miał 3 stany, a drugi $p^2 + p + 3$ stanów.

Inną pionierską konstrukcję nieskończonych p-grup generowanych przez dwa przekształcenia automatowe nad alfabetem p-literowym podał W. Suszczański ([75]) w 1979 roku. Zastosował on w niej algebraiczny język tablic wraz z tzw. ściętymi wielomianami nad ciałem skończonym – metodę wprowadzoną przez L. Kaloujnina ([48]) do badania iterowanych splotów grup. W 2006 roku I. Bondarenko i D. Savchuk ([19]) wyodrębnili tzw. sekcje przekształceń Suszczańskiego, otrzymując w ten sposób automat o $2p^2+p+5$ stanach i wyprowadzając szereg własności grupy generowanej przez ten automat (czyli grupy zwanej samopodobnym domknięciem odpowiedniej p-grupy Suszczańskiego).

W 1980 roku R. I. Grigorchuk ([30]) otrzymał konstrukcję 5-stanowego automatu nad alfabetem binarnym i pokazał, że automat ten generuje nieskończoną 2-grupę, nazywaną obecnie grupą Grigorchuka. Poszukiwano również minimalnego (pod względem liczby stanów) automatu Mealy'ego, który generuje nieskończoną p-grupę. Dla każdego $p \geq 3$ automat taki skonstruował w 1985 roku Grigorchuk ([35]) – posiada on 3 stany i pracuje nad alfabetem p-literowym (przypadek $p = 3$ pokazano na rys. 1). W szczególności nie istnieje 2-stanowy automat Mealy'ego nad alfabetem p-literowym, który generuje nieskończoną p-grupę. Z drugiej strony, w zeszłym roku odkryłem dla dowolnej liczby pierwszej $p \geq 3$ automat Mealy'ego A o dwóch stanach nad alfabetem p-literowym, który definiuje uniwersalne zanurzenie dla skończonych p-grup, tzn. dowolną skończoną p-grupę można zanurzyć w grupę $G(A)$ generowaną przez ten automat (przypadek $p = 3$ przedstawia rys. 2). Jest to jedyny znany do tej pory przykład automatu o dwóch stanach, który generuje tzw. grupę rozgałęzioną (branch group) i jeden z dwóch (obok tzw. grupy Apoloniusza – [36]) znanych do tej pory przykładów skończenie generowanej grupy



Rysunek 2: automat definiujący uniwersalne zanurzenie dla skończonych 3-grup

regularnie rozgałęzionej, mającej nieskończoną grupę cykliczną jako swój obraz homomorficzny (indicable group). Wynik ten zreferowałem na międzynarodowej konferencji w Kijowie „Groups and actions: geometry and dynamics" ([84]), a także w tym roku na seminarium z teorii grup na Uniwersytecie Genewskim (Szwajcaria) na zaproszenie R. I. Grigorchuka ([85]). Dla $p = 2$ istnienie takiego 2-stanowego automatu wyklucza znana klasyfikacja wszystkich grup (z dokładnością do izomorfizmu) generowanych przez automaty Mealy'ego o dwóch stanach nad alfabetem binarnym; są to ([35]): grupa trywialna, grupy cykliczne C_2 i C_∞, grupa czwórkowa Kleina $C_2 \times C_2$, nieskończona grupa diedralna D_∞ oraz grupa migających żarówek (lamplighter group) $C_2 wr C_\infty$, czyli iloczyn półprosty $\bigoplus_{C_\infty} C_2 \rtimes C_\infty$ z działaniem C_∞ na sumie prostej $\bigoplus_{C_\infty} C_2$ przez lewostronne przesunięcie. Obecnie trwają ([17]) próby klasyfikacji grup generowanych przez 3-stanowe automaty Mealy'ego nad alfabetem binarnym (sklasyfikowano do tej pory wszystkie grupy skończone i abelowe generowane przez takie automaty).

Grupy automatowe stanowią również interesujący obiekt badawczy dla klasycznych w teorii grup problemów algorytmicznych. Przykładowo, znana konstrukcja złożenia automatów oraz konstrukcja automatu odwrotnego, jak również algorytm testujący w automacie, czy dany jego stan definiuje przekształcenie identycznościowe (wystarczy w tym celu przetestować wychodzące z tego stanu ścieżki o długości nie większej niż liczba wszystkich stanów), prowadzi od razu do wniosku, że skończenie generowane grupy automatowe mają rozwiązywalny problem słów. Z drugiej strony, w 2012 roku Z. Šunić i E. Ventura ([74]) uzyskali konstrukcję automatu A, dla którego problem sprzężoności w grupie $G(A)$ nie jest rozwiązywalny. Opierając się na niej, pokazali, że problem izomorfizmu nie jest rozwiązywalny w klasie grup generowanych przez automaty Mealy'ego.

Do dużego zainteresowania grupami automatowymi przyczyniła się z pewnością grupa Grigorchuka, która rozwiązała także problem Milnora z 1968 roku, pytający o możliwe typy wzrostu grup (grupa Grigorchuka ma tzw. wzrost pośredni – [31]) oraz problem Day'a z 1957 roku, dotyczący istnienia grupy średniowalnej, nie będącej grupą elementarnie średniowalną ([32]). Do chwili obecnej skonstruowano wiele interesujących przykładów grup generowanych przez automaty Mealy'ego. Są one nadal intensywnie badane (wliczając w to grupę Grigorchuka) i często potwierdzają jeden z większych fenomenów współczesnej teorii grup, czyli fakt, że sam automat może mieć bardzo prostą budowę, liczyć tylko dwa lub trzy stany i pracować nad alfabetem zaledwie kilkuliterowym, a mimo to wykazywać się dużą egzotyką i stopniem komplikacji, jeżeli chodzi o algebraiczne, geometryczne, czy też algorytmiczne własności grupy przez niego generowanej.

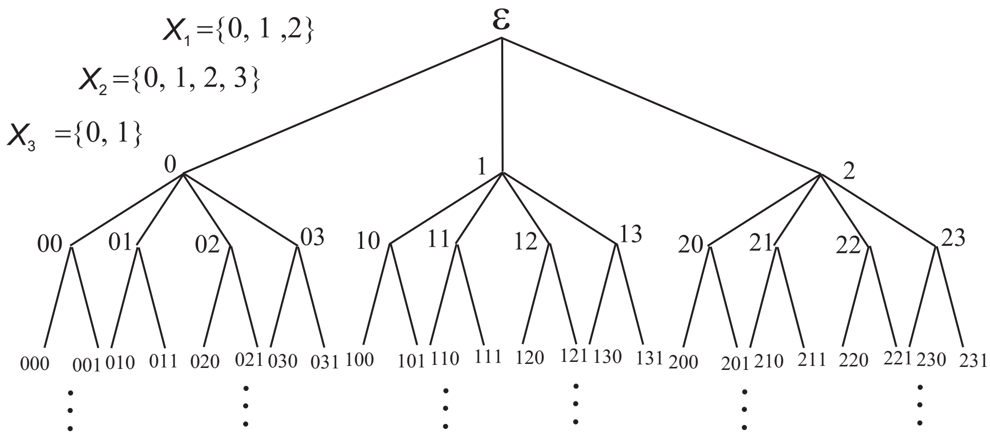
1.2 Drzewa słów: regularne i poziomowo jednorodne

Zbiór X^* skończonych słów nad alfabetem X ma strukturę nieskończonego, lokalnie skończonego drzewa z korzeniem: dwa słowa łączymy krawędzią, jeżeli jedno z nich powstaje z drugiego przez dopisanie na koniec jednej litery. Zbiór X^n słów długości n ($n \geq 0$) tworzy n-ty poziom drzewa X^*, czyli zbiór wierzchołków oddalonych o n od korzenia (którym jest słowo puste ϵ). Drzewo X^* jest nazywane drzewem regularnym z korzeniem, gdyż dla każdego wierzchołka $w \in X^*$ liczba jego bezpośrednich potomków (tj. słów postaci wx dla $x \in X$) nie zależy od w i jest równa $|X|$.

W sposób naturalny rozpatruje się szerszą klasę lokalnie skończonych drzew z korzeniem. Są to drzewa, w których dowolne dwa wierzchołki z tego samego poziomu (tzn. tak samo odległe od korzenia) mają taką samą liczbę bezpośrednich potomków. Każde takie drzewo jest izomorficzne z drzewem słów nad zmiennym alfabetem, który definiujemy jako nieskończony ciąg

$$X := (X_1, X_2, \ldots)$$

alfabetów. Słowami w tym drzewie są ciągi liter postaci $x_1 x_2 \ldots x_n$, gdzie $x_i \in X_i$ dla $1 \leq i \leq n$ (nie będziemy liter oddzielać przecinkami). Słowa długości $n \geq 0$, czyli elementy iloczynu kartezjańskiego $X^n := X_1 \times \ldots \times X_n$ (dla $n = 0$ przyjmujemy $X^0 := \{\epsilon\}$), tworzą n-ty poziom tego drzewa. W szczególności liczba bezpośrednich potomków każdego wierzchołka z n-tego poziomu ($n \geq 0$) jest równa $|X_{n+1}|$. Pierwsze cztery poziomy przykładowego drzewa X^* przedstawia rys. 3.



Rysunek 3: przykładowe drzewo X^*

Definicja 1 Zmienny alfabet $X = (X_i)_{i \geq 1}$ nazywamy ograniczonym, jeżeli ciąg $(|X_i|)_{i \geq 1}$ jest ograniczony. W przeciwnym razie alfabet X nazywamy nieograniczonym. Jeżeli X jest ciągiem stałym, to nazywamy go stałym alfabetem i utożsamiamy ze zbiorem X_1.

Uwaga 1 Zakładamy dalej, że jeżeli $X = (X_i)_{i \geq 1}$ jest zmiennym alfabetem, to wszystkie zbiory X_i są skończone i mają co najmniej 2 elementy.

1.3 Grupa $Aut(X^*)$ i grupy definiowane przez automaty zmienne w czasie

Grupa $Aut(X^*)$ automorfizmów drzewa X^* nad zmiennym alfabetem $X = (X_i)_{i \geq 1}$ składa się ze wszystkich permutacji zbioru wierzchołków, które zachowują korzeń i relację sąsiedztwa. Są to dokładnie te permutacje zbioru X^*, które zachowują długości i początki słów.

W przypadku, gdy alfabet $X = (X_i)_{i \geq 1}$ jest stały, to grupa $\mathcal{MA}(X^*)$ przekształceń definiowanych przez automaty Mealy'ego nad alfabetem X tworzy właściwą podgrupę w grupie $Aut(X^*)$. Gdy alfabet X nie jest stały, to w grupie $Aut(X^*)$ również można wyróżnić podgrupy generowane przez automaty. Są to tzw. automaty zmienne w czasie (inna nazwa: automaty nad zmiennym alfabetem). Automat taki powstaje z automatu Mealy'ego przez nałożenie na niego dyskretnej skali czasu i dopuszczenie możliwości zmiany struktury przejść i wyjść w kolejnych taktach jego pracy.

Definicja 2 Automat A nad zmiennym alfabetem $X = (X_i)_{i\geq 1}$ definiujemy jako skończony zbiór stanów S wraz z dwoma nieskończonymi ciągami

$$\varphi := (\varphi_1, \varphi_2, \ldots), \quad \psi := (\psi_1, \psi_2, \ldots)$$

funkcji przejść $\varphi_i \colon S \times X_i \to S$ i funkcji wyjść $\psi_i \colon S \times X_i \to X_i$. Automat taki będziemy oznaczać jako czwórkę $A = (S, X, \varphi, \psi)$.

Uwaga 2 W dalszym ciągu, zamiast mówić „automat nad zmiennym alfabetem" lub „automat zmienny w czasie", będziemy używali prostego określenia „automat". Mówiąc zatem „automat", będziemy mieć na myśli automat z definicji 2, rozróżniając to pojęcie od automatu Mealy'ego, traktowanego jako szczególny przypadek automatu, w którym wszystkie trzy ciągi $X = (X_i)_{i\geq 1}$, $\varphi = (\varphi_i)_{i\geq 1}$ i $\psi = (\psi_i)_{i\geq 1}$ są stałe (ciągi te będziemy wówczas utożsamiać z ich elementami).

Dla każdego stanu $s \in S$ automatu $A = (S, X, \varphi, \psi)$ możemy, analogicznie jak dla automatu Mealy'ego, zdefiniować przekształcenie automatowe $\widetilde{s} \colon X^* \to X^*$ w sposób rekurencyjny: jeżeli $w = x_1 \ldots x_n \in X^*$, to

$$\widetilde{s}(w) = \psi_1(s_1, x_1) \ldots \psi_n(s_n, x_n),$$

gdzie $s_1 := s$ oraz $s_{i+1} := \varphi_i(s_i, x_i)$ dla $1 \leq i \leq n-1$. Wygodnie jest patrzeć na tego typu przekształcanie jak na rezultat działania maszyny, która w i-tej sekundzie ($i \geq 1$), będąc w dowolnym stanie $q \in S$ i pobierając na wejściu literę $x \in X_i$, przechodzi w następnej sekundzie do stanu $\varphi_i(q, x) \in S$, wypisuje na wyjściu literę $\psi_i(q, x) \in X_i$ i kontynuuje pracę w następnej sekundzie. Tu również zakładamy, że w każdym momencie automat A permutuje odpowiedni zbiór liter, tzn. odwzorowania

$$\sigma_{s,i} \colon X_i \ni x \mapsto \psi_i(s, x) \in X_i, \quad i \geq 1, \quad s \in S$$

są permutacjami zbioru X_i. Wówczas przekształcenia automatowe $\widetilde{s}$ ($s \in S$) są elementami grupy $Aut(X^*)$. Odwzorowanie $\sigma_{s,i} \in Sym(X_i)$ ($i \geq 1$, $s \in S$) będziemy nazywać etykietką stanu s w jego i-tym przejściu. Gdy A jest automatem Mealy'ego, to dla każdego stanu $s \in S$ wszystkie etykietki $\sigma_{s,i}$ ($i \geq 1$) stanowią tę samą permutację alfabetu $X = X_1$. Permutację $\sigma_s := \sigma_{s,1} \in Sym(X)$ będziemy wówczas nazywać etykietką stanu s.

Zbiór $\mathcal{TVA}(X^*)$ wszystkich przekształceń automatowych nad zmiennym alfabetem $X = (X_i)_{i\geq 1}$ również tworzy właściwą podgrupę w grupie $Aut(X^*)$. Podobnie jak dla automatów Mealy'ego, podgrupy grupy $\mathcal{TVA}(X^*)$ będziemy nazywać grupami automatowymi, a dla pojedynczego automatu $A = (S, X, \varphi, \psi)$ grupę $G(A) := \langle \widetilde{s} \colon s \in S \rangle$ – grupą generowaną przez automat A. Wszystkie te grupy są skończenie aproksymowalne, gdyż $Aut(X^*)$ jest skończenie aproksymowalna, co wynika z obserwacji, że stabilizator n-tego poziomu

$$Stab_{Aut(X^*)}(n) = \{g \in Aut(X^*) \colon X^n \subseteq Fix(g)\}, \; n \geq 0,$$

jest w tej grupie dzielnikiem normalnym skończonego indeksu oraz $\bigcap_{n\geq 0} Stab_{Aut(X^*)}(n) = \{id_{X^*}\}$.

Ideę automatu zmiennego w czasie jako narzędzia do definiowania i badania grup automorfizmów drzewa słów nad zmiennym alfabetem zaproponował W. Suszczański w 2001 roku, jako temat mojej pracy doktorskiej. Początkowo zakładałem nawet szerszą definicję, niż ta powyżej, tzn. dopuszczałem zmianę zbiorów stanów w kolejnych taktach pracy automatu (pierwotnie nie zakładałem również skończoności zbiorów stanów). Automaty z tej szerszej definicji nazwałem zmiennymi w czasie automatami Mealy'ego. Przedtem pojęcie to funkcjonowało w literaturze (zob. [58]), ale badano wyłącznie jego strukturalne własności (związane np. z analizą i syntezą automatów, pojęciem okresowości, reprezentowalności, czy morfizmu między automatami). Znamienne jest także ówczesne założenie co do alfabetu w takim automacie – zakładano, że jest to stały alfabet, dopuszczając zmiany wyłącznie zbiorów stanów, funkcji przejść i funkcji wyjść. W rezultacie konstrukcja ta nie nadawałaby się do definiowania grup automorfizmów dowolnych drzew poziomowo jednorodnych z korzeniem, ale tylko regularnych.

1.4 Sekcje i etykietki a przekształcenia automatowe

Niech $X = (X_i)_{i\geq 1}$ będzie zmiennym alfabetem, $g \in Aut(X^*)$ i $w \in X^*$. Oznaczmy $n := |w|+1$. Ponieważ automorfizm g zachowuje początki i długości słów, to istnieje taki automorfizm $g_{\{w\}} \in Aut(X^*_{(n)})$ drzewa słów $X^*_{(n)}$ nad zmiennym alfabetem $X_{(n)} := (X_n, X_{n+1}, \ldots)$, że

$$g(wv) = g(w)g_{\{w\}}(v),\ v \in X^*_{(n)}.$$

Automorfizm $g_{\{w\}}$ jest nazywany sekcją automorfizmu g na słowie w. Opisuje on działanie automorfizmu g na poddrzewie drzewa X^*, składającym się ze wszystkich potomków słowa w (poddrzewo to jest izomorficzne z drzewem $X^*_{(|w|+1)}$). W przypadku regularnym, tzn. gdy X jest stałym alfabetem, mamy oczywiście: $g_{\{w\}} \in Aut(X^*)$. Ważną klasę grup w tym przypadku stanowią grupy samopodobne, a wśród nich grupy zwężające ([60]).

Definicja 3 Jeżeli X jest stałym alfabetem, to grupę $G \leq Aut(X^*)$ nazywamy samopodobną (self-similar group), jeżeli $g_{\{w\}} \in G$ dla wszystkich $g \in G$ i $w \in X^*$. Samopodobną grupę $G \leq Aut(X^*)$ nazywamy zwężającą (contracting group), jeżeli istnieje taki skończony zbiór $S \subseteq G$, że dla dowolnego elementu $g \in G$ każda sekcja tego elementu na słowie wystarczająco długim należy do S (tzn. istnieje liczba $n := n_g \geq 0$ taka, że $g_{\{w\}} \in S$ dla wszystkich słów $w \in X^*$ o długości większej niż n). Zbiór S nazywamy rdzeniem (nucleus) grupy G.

Obcięcie sekcji $g_{\{w\}} \in Aut(X^*_{(|w|+1)})$ do zbioru $X_{|w|+1}$ słów jednoliterowych nazywamy etykietką automorfizmu g na słowie w i oznaczamy przez $\sigma_{g,w}$:

$$\sigma_{g,w} \colon X_{|w|+1} \to X_{|w|+1}, \quad \sigma_{g,w} := g_{\{w\}}|_{X_{|w|+1}}.$$

W szczególności $\sigma_{g,w} \in Sym(X_{|w|+1})$. Etykietka $\sigma_{g,w}$ informuje o tym, w jaki sposób automorfizm g permutuje (względem wierzchołka w) wierzchołki będące bezpośrednimi potomkami wierzchołka w. Umieszczając przy każdym wierzchołku $w \in X^*$ etykietkę $\sigma_{g,w} \in Sym(X_{|w|+1})$, otrzymujemy tzw. portret automorfizmu g. Portret automorfizmu $g \in Aut(X^*)$ opisuje ten automorfizm jednoznacznie. Jeżeli bowiem $w = x_1 \ldots x_n \in X^*$ jest dowolnym słowem, to

$$g(w) = \sigma_{g,w_0}(x_1)\sigma_{g,w_1}(x_2)\ldots\sigma_{g,w_{n-1}}(x_n),$$

gdzie $w_i = x_1 \ldots x_i$ $(0 \leq i \leq n-1)$ jest prefiksem długości i słowa w (relację bycia prefiksem będziemy dalej oznaczać przez $\prec$). Na odwrót, jeżeli wybierzemy dowolnie permutacje $\pi_w \in$

$Sym(X_{|w|+1})$ ($w \in X^*$), to istnieje dokładnie jeden automorfizm $g \in Aut(X^*)$ taki, że $\sigma_{g,w} = \pi_w$ dla każdego $w \in X^*$. Stosując powyższą formułę, można rozszerzyć działanie automorfizmu g na zbiór X^ω słów nieskończonych nad alfabetem X, tzn. jeżeli $w = x_1x_2\ldots \in X^\omega$, to $g(w) = \sigma_{g,w_0}(x_1)\sigma_{g,w_1}(x_2)\ldots$.

Jeżeli $g \in Aut(X^*)$ jest przekształceniem automatowym zdefiniowanym przez pewien stan $s \in S$ automatu $A = (S, X, \varphi, \psi)$, to dla każdego słowa $w \in X^*$ sekcja $g_{\{w\}}$ jest w pełni określona przez stan, w jakim znajdzie się ten automat po odczytaniu (ze stanu s) słowa w. W szczególności, dla każdego $n \geq 0$ ilość różnych sekcji $g_{\{w\}}$ na słowach $w \in X^n$ nie przekracza $|S|$. Wynika stąd, że ciąg $(\alpha_g(n))_{n\geq 0}$ jest ograniczony, gdzie

$$\alpha_g(n) := |\{g_{\{w\}} \colon w \in X^n\}|.$$

Na odwrót, jeżeli $g \in Aut(X^*)$ jest takim automorfizmem, że ciąg $(\alpha_g(n))_{n\geq 0}$ jest ograniczony, to można skonstruować taki automat $A = (S, X, \varphi, \psi)$, że $g = \widetilde{s}$ dla pewnego $s \in S$. Nietrudno też skonstruować automorfizmy $g \in Aut(X^*)$, dla których ciąg $(\alpha_g(n))_{n\geq 0}$ jest nieograniczony. Charakteryzacja przekształceń definiowanych przez automaty Mealy'ego jest bardziej restrykcyjna: jeżeli X jest stałym alfabetem, to automorfizm $g \in Aut(X^*)$ jest definiowany przez pewien automat Mealy'ego nad X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{g_{\{w\}} \colon w \in X^*\}$ jest skończony.

1.5 Automorfizmy ukorzenione i skierowane. Grupy rozgałęzione.

Większość znanych i badanych konstrukcji skończenie generowanych grup automorfizmów drzewa X^* opiera się na dwóch typach automorfizmów: ukorzenionych i skierowanych.

Definicja 4 Automorfizm $g \in Aut(X^*)$ nazywamy ukorzenionym, jeżeli $\sigma_{g,w} = id_{X_{|w|+1}}$ dla każdego słowa $w \neq \epsilon$.

Definicja 5 Niech $g \in Aut(X^*)$. Jeżeli istnieje takie nieskończone słowo $u \in X^\omega$, że automorfizm g stabilizuje to słowo (tzn. $g(u) = u$), a wszystkie jego nietrywialne etykietki odchodzą od u na odległość co najwyżej 1 (tzn. mogą to być etykietki jedynie na słowach postaci $wx \in X^*$, gdzie $w \prec u$ oraz $x \in X_{|w|+1}$), to automorfizm g nazywamy skierowanym, a słowo u – jego kierunkiem. Jeżeli ponadto wszystkie nietrywialne etykietki odchodzą od u na odległość dokładnie 1, a na każdym poziomie drzewa X^* istnieje co najwyżej jedna nietrywialna etykietka, to g nazywamy automorfizmem 1-skierowanym.

Przykładowo, w 5-stanowym automacie Mealy'ego definiującym grupę Grigorchuka jeden stan jest trywialny (tzn. definiuje $id_{\{0,1\}^*}$), inny stan definiuje nietrywialny automorfizm ukorzeniony, a pozostałe trzy stany definiują automorfizmy 1-skierowane o wspólnym kierunku 1^∞. Inny przykład to skonstruowana w 1983 roku przez N. Gupta i S. Sidki ([40]) nieskończona 2-generowana p-grupa, gdzie $p > 2$ jest dowolną liczbą pierwszą. Grupa ta jest generowana przez automat Mealy'ego o czterech stanach nad alfabetem $X = \{1, 2, \ldots, p\}$; trzy z tych stanów definiują automorfizmy ukorzenione (jeden trywialny id, a pozostałe dwa to automorfizmy a i a^{-1}, przy czym $\sigma_{a,\epsilon} = \sigma := (1, 2, \ldots, p)$), zaś czwarty stan definiuje automorfizm skierowany $b \in Aut(X^*)$ o kierunku $u = p^\infty$, z następującymi nietrywialnymi etykietkami: $\sigma_{b,p^i 1} := \sigma$ i $\sigma_{b,p^i 2} := \sigma^{-1}$ dla każdego $i \geq 0$. To, że grupa $G := \langle a, b\rangle$ istotnie jest generowana przez automat Mealy'ego o czterech stanach (definiujących powyższe cztery automorfizmy) wynika z obserwacji, że dla dowolnego $g \in \{id, a, a^{-1}, b\}$ i dowolnego słowa $w \in X^*$ zachodzi:

$g_{\{w\}} \in \{id, a, a^{-1}, b\}$. Podobnie jak grupa Grigorchuka, grupy Gupta-Sidki są nadal intensywnie badane (w przeciwieństwie do grupy Grigorchuka, nie wiadomo, na przykład, jaki mają wzrost).

Automorfizmy ukorzenione i skierowane można rozpatrywać jako przekształcenia automatowe. Jednak w przypadku, gdy alfabet $X = (X_i)_{i\geq 1}$ jest nieograniczony (i tylko w tym przypadku), nie każdy automorfizm skierowany $g \in Aut(X^*)$ jest przekształceniem automatowym. Z drugiej strony, każdy automorfizm 1-skierowany $g \in Aut(X^*)$ jest przekształceniem automatowym (niezależnie od ograniczoności alfabetu), jako że mamy wówczas: $\alpha_g(n) \leq 3$ dla każdego $n \geq 0$.

Drzewo słów skończonych X^* jak również grupę automorfizmów $Aut(X^*)$ takiego drzewa, a także pojęcie automorfizmu ukorzenionego i skierowanego, można oczywiście rozpatrywać dla nieskończonego ciągu $X = (X_i)_{i\geq 1}$ dowolnych (tj. skończonych lub nieskończonych) zbiorów, a zatem niekoniecznie, gdy X jest zmiennym alfabetem. Wówczas jednak drzewo takie nie będzie z reguły lokalnie skończone, a grupa $Aut(X^*)$ nie będzie skończenie aproksymowalna. Uogólnienie to rozpatrywał w 1986 roku A. Rozhkov ([69]), który skonstruował dla dowolnej liczby pierwszej $p \geq 3$ nieskończoną grupę torsyjną M_p, generowaną przez dwa elementy rzędu 3 i rozważał drzewo słów X^* nad ciągiem $X := (C_7, M_2, C_7, C_7, M_3, C_7, C_7, M_5, \ldots)$. Następnie skonstruował w grupie $Aut(X^*)$ automorfizm ukorzeniony r i automorfizm skierowany d o tej własności, że grupa $G = \langle r, d\rangle$ jest torsyjna i zawiera elementy wszystkich możliwych rzędów (tzn. dla każdego naturalnego $n \geq 1$ istnieje takie $g \in G$, że $o(g) = n$). Pytanie o istnienie tego typu grupy w przypadku, gdy X jest zmiennym alfabetem pozostaje otwarte. W szczególności interesująca byłaby jawna konstrukcja automatu nad zmiennym alfabetem, który generowałby tego typu grupę, lub też wykazanie, że taka nie istnieje. W przypadku istnienia alfabet taki musiałby być nieograniczony.

Na automorfizmach ukorzenionych i skierowanych opiera się ogólna metoda konstruowania skończenie generowanych grup rozgałęzionych ([6]).

Definicja 6 Grupę $G \leq Aut(X^*)$ działającą przechodnio na każdym poziomie drzewa X^* (mówimy wówczas o działaniu sferycznie przechodnim) nazywamy rozgałęzioną, jeżeli dla każdego $n \geq 0$ podgrupa $Rist_G(n) := \langle Rist_G(w) \colon w \in X^n\rangle$ ma skończony indeks w G, przy czym $Rist_G(w)$ to podgrupa tych elementów $g \in G$, które działają trywialnie na każdym słowie nie zaczynającym się od w (rigid vertex stabilizer of w). Jeżeli wszystkie grupy $Rist_G(n)$ $(n \geq 0)$ są jedynie nietrywialne, to G nazywamy słabo rozgałęzioną (weakly branch).

Ta ważna i obecnie mocno badana klasa grup została wprowadzona przez Grigorchuka w 1997 roku, przynosząc m.in. naturalny sposób budowania grup nieskończonych, których każdy właściwy iloraz jest skończony, czyli grup just-infinite. Dowodzi się, że każda nieskończona, skończenie generowana grupa posiada, jako swój obraz homomorficzny, grupę just-infinite, a klasa wszystkich skończenie generowanych grup just-infinite rozpada się w sposób naturalny na trzy podklasy, z których jedna składa się wyłącznie z grup rozgałęzionych ([33]). Początkowo Grigorchuk przypuszczał nawet, że każda skończenie generowana grupa rozgałęziona musi być just-infinite, a jej realizację na drzewie można wykonać jedynie za pomocą automorfizmów ukorzenionych i skierowanych ([22]).

W przypadku drzewa regularnego, w klasie samopodobnych grup rozgałęzionych, wyróżnia się podklasę grup regularnie rozgałęzionych (regularly branch groups).

Definicja 7 Niech $G \leq Aut(X^*)$ będzie samopodobną grupą działającą sferycznie przechodnio na regularnym drzewie X^* i niech $K \triangleleft G$ będzie podgrupą normalną w G. Grupę G nazywamy regularnie rozgałęzioną nad K, jeżeli indeks $[G : K]$ jest skończony i dla dowolnych $k \in K$ i

$x_0 \in X$ istnieje takie $h \in K \cap Stab_G(1)$, że $h_{\{x_0\}} = k$ oraz $h_{\{x\}} = id_{X^*}$ dla $x \neq x_0$. W przypadku, gdy podgrupa K jest jedynie nietrywialna, to mówimy o grupie słabo regularnie rozgałęzionej (regularly weakly branch group).

Flagowymi przykładami grup regularnie rozgałęzionych są opisane wyżej grupa Grigorchuka, grupy Gupta-Sidki, a także skonstruowane w 2004 roku przez J. S. Wilsona ([81, 82]) grupy o wzroście wykładniczym, który nie jest jednakowo wykładniczy (groups of non-uniformly exponential growth), czyli grupy rozwiązujące problem Gromova. Do znanych i mocno badanych grup słabo regularnie rozgałęzionych zaliczamy takie grupy generowane przez automaty Mealy'ego jak grupa bazyliki ([38]), grupa Bartholdi'ego-Grigorchuka, grupa Brunner'a-Sidki-Vieira ([6]), a także, wspomniane wcześniej, samopodobne domknięcia p-grup Suszczańskiego.

1.6 Iterowane sploty permutacyjne. Grupa $Aut(X^*)$ jako grupa proskończona

Niech (G, X) i (H, Y) będą grupami permutacji zbiorów X i Y, niech H^X będzie grupą funkcji $f\colon X \to H$ z mnożeniem punktowym: $(f \cdot f')(x) = f(x)f'(x)$ $(f, f' \in H^X,\ x \in X)$. Dla dowolnych $f \in H^X$ i $g \in G$ para (f, g) definiuje permutację iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ w następujący sposób:

$$(f, g)((x, y)) = (g(x), h(y)), \quad (x, y) \in X \times Y,$$

gdzie $h := f(x) \in H$. Zbiór wszystkich takich permutacji (tj. permutacji zbioru $X \times Y$ odpowiadających parom $(f, g) \in H^X \times G$) tworzy grupę zwaną permutacyjnym splotem grup i oznaczaną przez $H \wr_X G$. Działanie mnożenia w tej grupie może być opisane następująco:

$$(f, g)(f', g') = (f \circ f'_g, g \circ g'),$$

gdzie $f'_g := g \circ f' \in H^X$ (dla składania odwzorowań będziemy używać notacji prawostronnej; w szczególności dla dowolnych $g, g' \in G$, $f \in H^X$, $x \in X$ mamy: $(g \circ g')(x) = g'(g(x)) \in X$ i $(g \circ f)(x) = f(g(x)) \in H$). Powyższa reguła mnożenia ukazuje splot $H \wr_X G$ jako iloczyn półprosty $H^X \rtimes G$, w którym grupa G działa na H^X w następujący sposób: $(g, f) \mapsto f_g = g \circ f$, tzn. f_g otrzymujemy z f permutując elementy $f(x) \in H$ $(x \in X)$ tak samo jak permutuje się elementy zbioru X za pomocą g. W szczególności, jeżeli X jest zbiorem skończonym z ustalonym porządkiem elementów, czyli np. $X = \{1, \ldots, m\}$ dla pewnego $m \geq 1$, to każdą funkcję $f \in H^X$ możemy zapisać jako ciąg $(f(1), \ldots, f(m))$ elementów grupy H, a na grupę H^X patrzeć jak na m-tą potęgę kartezjańską $H^m = H \times \ldots \times H$. Elementy splotu $H \wr_X G$ możemy wówczas zapisywać w postaci $(h_1, \ldots, h_m)\pi$, gdzie $h_j \in H$ $(1 \leq j \leq m)$, $\pi \in G$, a działanie mnożenia w tym splocie odbywa się następująco:

$$(h_1, \ldots, h_m)\pi\ (h'_1, \ldots, h'_m)\pi' = (h_1 \circ h'_{\pi(1)}, \ldots, h_m \circ h'_{\pi(m)})\pi \circ \pi'.$$

Konstrukcja splotu permutacyjnego jest łączna, tzn. jeżeli (K, Z) jest grupą permutacji na zbiorze Z, to obydwa sploty $(K \wr_Y H) \wr_X G$ i $K_{X \times Y}(H \wr_X G)$ stanowią tę samą grupę permutacji zbioru $X \times Y \times Z$ ([57]).

Niech teraz $(G_i, X_i)_{i \geq 1}$ będzie nieskończonym ciągiem grup permutacji zbiorów X_i $(i \geq 1)$. Dla każdego $i \geq 1$ definiujemy iterowany permutacyjny splot $W_i = \wr_{k=1}^{i} G_k$ pierwszych i grup tego ciągu, jako grupę permutacji iloczynu kartezjańskiego $X^i := X_1 \times \ldots \times X_i$, w następujący sposób:

$$W_1 := G_1,\ W_{i+1} := G_{i+1} \wr_{X^i} W_i,\ i \geq 1.$$

Dla każdego $i \geq 1$ odwzorowanie $\phi_i \colon (f,g) \mapsto g$, gdzie $f \in (G_{i+1})^{X^i}$, $g \in W_i$, jest epimorfizmem splotu W_{i+1} na splot W_i, a ciąg $(W_i, \phi_i)_{i\geq 1}$ definiuje surjektywny system odwrotny. Granicę odwrotną

$$W_\infty = \wr_{i=1}^{\infty} G_i := \varprojlim_i W_i = \varprojlim_i \wr_{k=1}^{i} G_k$$

tego systemu odwrotnego będziemy nazywać nieskończenie iterowanym splotem permutacyjnym grup (G_i, X_i). Zatem W_∞ składa się ze wszystkich ciągów $(h_i)_{i\geq 1}$ z iloczynu kartezjańskiego $\prod_{i\geq 1} W_i$, które spełniają warunek: $\phi_i(h_{i+1}) = h_i$ dla każdego $i \geq 1$. Jeżeli $X = (X_i)_{i\geq 1}$ jest zmiennym alfabetem, to sploty W_i są grupami skończonymi i wówczas splot W_∞ jest granicą odwrotną grup skończonych, czyli grupą proskończoną.

Niech $X = (X_i)_{i\geq 1}$ będzie zmiennym alfabetem. Oznaczmy $X_1 := \{x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1}\}$. Dowolny automorfizm $g \in Aut(X^*)$ jest jednoznacznie określony poprzez swoje sekcje $g_{\{x_{1,1}\}}, \ldots, g_{\{x_{1,m_1}\}}$ na słowach jednoliterowych wraz z etykietką $\sigma_{g,\epsilon} \in Sym(X_1)$ na słowie pustym. Odwzorowanie

$$g \mapsto (g_{\{x_{1,1}\}}, \ldots, g_{\{x_{1,m_1}\}})\sigma_{g,\epsilon}$$

określa izomorfizm grupy $Aut(X^*)$ ze splotem permutacyjnym

$$Aut(X^*_{(2)}) \wr_{X_1} Sym(X_1) = Aut(X^*_{(2)})^{m_1} \rtimes Sym(X_1).$$

Kontynuując to rozumowanie dla grup $Aut(X^*_{(n)})$ $(n = 2, 3, \ldots)$, dostajemy dla każdego $n \geq 1$ izomorfizm grupy $Aut(X^*)$ ze splotem permutacyjnym $Aut(X^*_{(n+1)}) \wr_{X^n} (\wr_{i=1}^{n} Sym(X_i))$. W szczególności grupa ilorazowa $Aut(X^*)/Stab_{Aut(X^*)}(n)$ jest izomorficzna z n-iterowanym splotem $\wr_{i=1}^{n} Sym(X_i)$. Obcięcie $g|^n := g|_{X^n}$ dowolnego automorfizmu $g \in Aut(X^*)$ do zbioru $X^n = X_1 \times \ldots \times X_n$ jest elementem tego iterowanego splotu, a odwzorowanie $g \mapsto (g|^n)_{n\geq 1}$ określa izomorfizm grupy $Aut(X^*)$ z nieskończenie iterowanym splotem $\wr_{i=1}^{\infty} Sym(X_i)$.

Powyższy opis grupy $Aut(X^*)$, jako grupy proskończonej, definiuje na tej grupie naturalną, proskończoną topologię, w której stabilizatory $Stab_{Aut(X^*)}(n)$ $(n \geq 0)$ kolejnych poziomów drzewa X^* tworzą bazę otoczeń elementu neutralnego id_{X^*}. Topologia ta (zwana również topologią kongruencji – the congruence topology) pokrywa się z topologią określoną przez metrykę, w której dwa automorfizmy są *blisko siebie*, jeżeli dla *dużego* n działają tak samo na n-tym poziomie drzewa X^*, czyli np. przez metrykę

$$\delta(g,h) := \inf\{(1/2)^n \colon \forall\, w \in X^n\ g(w) = h(w)\}.$$

W szczególności splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ stanowi w grupie $Aut(X^*)$ podgrupę domkniętą, składającą się z tych automorfizmów, których etykietki przy wierzchołkach z n-tego $(n \geq 0)$ poziomu drzewa X^* należą do grupy G_{n+1}:

$$\wr_{i=1}^{\infty} G_i = \{g \in Aut(X^*) \colon \forall w \in X^*\ \sigma_{g,w} \in G_{|w|+1}\}.$$

Relacja

$$g = (g_{\{x_{1,1}\}}, \ldots, g_{\{x_{1,m_1}\}})\sigma_{g,\epsilon}$$

utożsamia automorfizm $g \in Aut(X^*)$ z odpowiednim elementem splotu $Aut(X^*_{(2)}) \wr_{X_1} Sym(X_1)$. Relację tę nazywamy rekursją splotową automorfizmu g. Mnożenie rekursji splotowych oraz odwracanie odbywa się zgodnie z obowiązującym w powyższym splocie działaniem. Mamy więc

$$g^{-1} = ((g_{\{y_{1,1}\}})^{-1}, \ldots, (g_{\{y_{1,m_1}\}})^{-1})\sigma_{g,\epsilon}^{-1}, \tag{1}$$

gdzie $y_{1,i} := \sigma_{g,\epsilon}^{-1}(x_{1,i})$ dla $1 \leq i \leq m_1$, a jeżeli $h = (h_{\{x_{1,1}\}}, \ldots, h_{\{x_{1,m_1}\}})\sigma_{h,\epsilon}$, to

$$g \circ h = (g_{\{x_{1,1}\}} \circ h_{\{z_{1,1}\}}, \ldots, g_{\{x_{1,m_1}\}} \circ h_{\{z_{1,m_1}\}})\sigma_{g,\epsilon} \circ \sigma_{h,\epsilon}, \tag{2}$$

gdzie $z_{1,i} := \sigma_{g,\epsilon}(x_{1,i})$ dla $1 \leq i \leq m_1$.

Uwaga 3 Jeżeli etykietka $\sigma_{g,\epsilon}$ jest trywialną permutacją, to będziemy ją pomijać w zapisie i pisać $g = (g_{\{x_{1,1}\}}, \ldots, g_{\{x_{1,m_1}\}})$. Jeżeli zaś wszystkie sekcje $g_{\{x_{1,r}\}}$ $(1 \leq r \leq m_1)$ są trywialne, to automorfizm g będziemy utożsamiać z etykietką $\sigma_{g,\epsilon}$. W ten sposób, zarówno potęgę prostą $Aut(X^*_{(2)})^{X_1}$ jak i grupę symetryczną $Sym(X_1)$ będziemy utożsamiać z odpowiednimi podgrupami grupy $Aut(X^*)$ (tj. ze stabilizatorem pierwszego poziomu $Stab_{Aut(X^*)}(1)$ i z podgrupą permutacji ukorzenionych, odpowiednio).

Badanie nieskończenie iterowanych splotów permutacyjnych $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ skończonych grup permutacji zapoczątkował L. Kaloujnine [47, 48] w połowie lat 40-tych ubiegłego wieku, a kontynuowali jego uczniowie: Y. V. Bodnarchuk ([14]), I. D. Ivanyuta ([42]), W. Suszczański ([26, 76, 77, 78]) i inni. Okazuje się, że każda pro-p podgrupa Sylowa grupy $Aut(X^*)$ jest tego typu splotem. Dla grup rozgałęzionych sploty $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ odgrywają ważną rolę, jako ich proskończone uzupełnienia (profinite completions), dostarczając interesujących przykładów i kontrprzykładów w klasie grup proskończonych ([34]). Gdy ciąg $(G_i, X_i)_{i \geq 1}$ jest stały, to dostajemy nieskończoną potęgę splotową $\wr_{i=1}^{\infty} G^{(i)}$ grupy $G := G_1$. Potęgi takie charakteryzują tak zwane grupy samopodobne skończonego typu, opisywalne wzorcem głębokości jeden ([18, 34]). Iterowane sploty grup pojawiają się także jako grupy symetrii deseni ([3, 4]), a w chemii opisują symetrie niesztywnych molekuł ([5, 83]). Konstrukcja ta znalazła nawet zastosowanie przy opisie procesów zachodzących w czasie przetwarzania informacji w systemach wizyjnych ([51]).

1.7 Topologiczne generowanie w grupie $Aut(X^*)$

Niech $X = (X_i)_{i \geq 1}$ będzie zmiennym alfabetem oraz $G \leq Aut(X^*)$. Powiemy, że zbiór $S \subseteq Aut(X^*)$ generuje topologicznie grupę G, jeżeli grupa $\langle S \rangle$ generowana przez ten zbiór jest gęstym podzbiorem w G. Przez $d(G)$ oznaczamy rangę grupy G, czyli minimalną liczbę elementów w zbiorze generującym tę grupę (gdy G jest podgrupą domkniętą, to mamy na myśli rangę topologiczną, czyli minimalną liczbę elementów w zbiorze generującym topologicznie tę grupę). Jeżeli $d(G) < \infty$, to mówimy, że G jest skończenie generowana (odpowiednio: topologicznie skończenie generowana).

Definicja 8 Zbiór S generatorów grupy $G \leq Aut(X^*)$ (topologicznych generatorów, gdy G jest domknięta), dla którego $|S| = d(G)$, będziemy nazywać minimalnym zbiorem generatorów (odp. minimalnym zbiorem topologicznych generatorów).

Zgodnie z opisaną wyżej proskończoną topologią w grupie $Aut(X^*)$, podzbiór S grupy $G \leq Aut(X^*)$ generuje topologicznie tę grupę wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle s|^i : s \in S \rangle = \langle g|^i : g \in G \rangle$$

dla każdego $i \geq 0$, gdzie $g|^i$ oznacza obcięcie automorfizmu g do i-tego poziomu drzewa X^*. W szczególności zachodzi nierówność $d(G) \geq d(\overline{G})$, gdzie $\overline{G}$ jest domknięciem topologicznym grupy G w grupie $Aut(X^*)$.

Cała grupa $Aut(X^*)$ nie jest topologicznie skończenie generowana, gdyż nieskończona potęga prosta $C_2^{\{0,1,2,\ldots\}}$ grupy cyklicznej C_2 (a więc również każda skończona potęga C_2^t, $t = 1, 2, \ldots$)

jest jej obrazem homomorficznym. Obraz ten powstaje, gdy przyporządkujemy automorfizmowi $g \in Aut(X^*)$ ciąg z $C_2^{\{0,1,2,\ldots\}}$, w którym n-ty wyraz ($n \geq 0$) jest równy 0 lub 1, w zależności od tego, czy iloczyn etykietek $\sigma_{g,w} \in Sym(X_{n+1})$ na słowach $w \in X^n$ jest permutacją parzystą, czy nieparzystą.

W 1994 roku M. Bhattacharjee ([12]), badając sploty $\wr_{i=1}^{\infty} Alt(n_i)$ grup alternujących stopnia $n_i \geq 5$, wykazała, że są one topologicznie 2-generowane. W rezultacie, jeżeli $|X_i| \geq 5$ dla każdego $i \geq 1$, to podgrupa $Aut_e(X^*) \leq Aut(X^*)$ automorfizmów parzystych (czyli automorfizmów, których wszystkie etykietki są permutacjami parzystymi) jest topologicznie 2-generowana.

Twierdzenie 1 (Bhattacharjee, [12]) *Jeżeli $|X_i| \geq 5$ dla każdego $i \geq 1$, to splot $\wr_{i=1}^{\infty} Alt(X_i)$ jest topologicznie 2-generowany.*

W 2006 roku M. Quick ([67]) rozszerzył ten rezultat na dowolne nieabelowe grupy proste.

Twierdzenie 2 (Quick, [67]) *Jeżeli $(H_i, X_i)_{i \geq 1}$ jest dowolnym ciągiem prostych nieabelowych przechodnich grup permutacji, to splot $\wr_{i=1}^{\infty} H_i$ jest topologicznie 2-generowany.*

W pracy Quick'a nie podano żadnej konstrukcji zbioru topologicznych generatorów dla badanych splotów. Z kolei praca Bhattacharjee zawiera taką konstrukcję i opiera się ona na pewnych specyficznych generatorach grup $Alt(n_i)$, zależnych od reszty z dzielenia n_i przez 4. Konstrukcja ta wydaje się jednak zbyt złożona, aby badać grupę generowaną przez uzyskany w ten sposób zbiór.

W 2010 roku Bondarenko ([15]) sformułował kryterium, kiedy splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ przechodnich grup permutacji (G_i, X_i) z ograniczonym ciągiem rang $(d(G_i))_{i \geq 1}$ jest topologicznie skończenie generowany:

Twierdzenie 3 (Bonadrenko, [15]) *Niech $(G_i, X_i)_{i \geq 1}$ będzie ciągiem przechodnich grup permutacji. Jeżeli ciąg $(d(G_i))_{i \geq 1}$ jest ograniczony, to $d(\wr_{i=1}^{\infty} G_i) < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(\prod_{i \geq 1} G_i/G_i') < \infty$.*

W powyższym twierdzeniu abelianizacje $A_i := G_i/G_i'$ ($i \geq 1$) są skończonymi grupami abelowymi, a więc iloczyn kartezjański $\prod_{i \geq 1} A_i$ jest proskończoną grupą abelową. Grupę tę można utożsamić z domkniętą podgrupą grupy $Aut(X^*)$, gdzie zmienny alfabet $X = (X_i)_{i \geq 1}$ otrzymujemy z regularnego działania grup A_i na sobie, tzn. $X_i := A_i$ dla każdego $i \geq 1$. Wówczas iloczyn $\prod_{i \geq 1} A_i$ stanowi domkniętą podgrupę splotu $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$, składającą się z tzw. automorfizmów jednorodnych, czyli automorfizmów, których wszystkie etykietki na słowach z dowolnie ustalonego poziomu drzewa X^* są takie same (oczywiście etykietki z różnych poziomów mogą się różnić). Ranga takiego iloczynu może być policzona następująco:

$$d(\prod_{i \geq 1} A_i) = \sup_{p \in \mathbb{P}} (\sup_{i \geq 1} \rho_{i,p}),$$

gdzie $\mathbb{P}$ jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych, a $\rho_{i,p}$ jest liczbą cyklicznych p-grup w rozkładzie kanonicznym iloczynu $A_1 \times \ldots \times A_i$ na iloczyn prosty grup cyklicznych o rzędach będących potęgami liczb pierwszych.

Twierdzenie 3 w jedna stronę jest oczywiste, gdyż iloczyn $\prod_{i \geq 1} G_i/G_i'$ jest obrazem homomorficznym splotu $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ (jako jego abelianizacja). Dla dowodu w drugą stronę Bondarenko dowodzi, że jeżeli grupy (G_i, X_i) spełniają pewne dodatkowe warunki, to istnieje skończony zbiór topologicznych generatorów splotu $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$, składający się z automorfizmów ukorzenionych i skierowanych. Zauważa też, że warunek ograniczoności ciągu $(d(G_i))_{i\geq 1}$ nie jest konieczny do tego, aby odpowiedni splot był topologicznie skończenie generowany.

Zupełnie inne podejście (bo czysto algebraiczne) zastosowali w 2013 roku E. Detomi i A. Luchcini ([23]) do wyprowadzenia następującej, pełnej charakteryzacji topologicznej skończonej generowalności splotów $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$.

Twierdzenie 4 (Detomi, Luchcini, [23]) *Niech $(G_i, X_i)_{i\geq 1}$ będzie ciągiem przechodnich grup permutacji. Wówczas $d(\wr_{i=1}^{\infty} G_i) < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(\prod_{i\geq 1} G_i/G_i') < \infty$ oraz ciąg $(d(G_i)/N_{i-1})_{i\geq 2}$ jest ograniczony, gdzie $N_i := |X_1| \cdot \ldots \cdot |X_i|$ dla $i \geq 1$.*

W dowodzie twierdzenia 4 analizowano faktory w maksymalnych ciągach normalnych (chief factors) skończonej grupy H i porównywano je z takimiż faktorami w splocie permutacyjnym $H \wr_Y G$ z przechodnią grupą permutacji (G, Y). Podejście to, podobnie jak praca Quick'a, nie przynosi jednak żadnej konstrukcji zbioru topologicznych generatorów dla splotu $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$.

1.8 Znane wcześniej konstrukcje topologicznych zbiorów generatorów dla splotów

W ramach swojej pracy doktorskiej udowodniłem (publikacja [D5] z 2006 roku – jej opis znajduje się na str. 49 niniejszego autoreferatu), że splot $\wr_{i=1}^{\infty} C_{m_i}$ skończonych przechodnich grup cyklicznych C_{m_i} o parami względnie pierwszych rzędach jest topologicznie 2-generowany. W przeciwieństwie jednak do przytoczonych wyżej prac, skonstruowałem przejrzysty, 2-elementowy zbiór topologicznych generatorów dla tego splotu i badałem grupę generowaną przez ten zbiór. Konstrukcję tę zrealizowałem za pomocą niezwykle prostego w opisie automatu o dwóch stanach nad alfabetem $X = (X_i)_{i\geq 1}$, w którym $|X_i| = m_i$ dla $i \geq 1$. W szczególności przedstawiłem splot $\wr_{i=1}^{\infty} C_{m_i}$ jako grupę generowaną przez 2-stanowy automat, tzn. skonstruowałem automat minimalny dla tego splotu.

Definicja 9 Powiemy, że grupa $G \leq Aut(X^*)$ jest generowana przez automat $A = (S, X, \varphi, \psi)$, jeżeli zachodzi równość $G(A) = G$, a w przypadku, gdy G jest podgrupą domkniętą – równość $\overline{G(A)} = G$. Jeżeli ponadto $|S| = d(G)$, to mówimy, że A jest automatem minimalnym dla grupy G. Jeżeli natomiast $|S| = d(G)+1$, przy czym jeden ze stanów automatu A jest trywialny (tzn. definiuje id_{X^*}), to mówimy, że A jest prawie minimalny dla grupy G.

Definicja 10 Automat A generujący grupę $G \leq Aut(X^*)$ nazwiemy optymalnym dla tej grupy, jeżeli liczba stanów w dowolnym innym automacie generującym G jest nie mniejsza niż liczba stanów w automacie A.

Znane przedtem konstrukcje skończonych zbiorów topologicznych generatorów dla splotów $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ rozpatrywano jedynie dla konkretnie dobranych ciągów $(G_i, X_i)_{i\geq 1}$ nieabelowych grup prostych (takich jak grupy alternujące $Alt(n_i)$, czy projektywne specjalne grupy liniowe $PSL_2(p_i)$) lub bliżej nieokreślonych grup doskonałych, spełniających pewne dodatkowe własności odnośnie działania na zbiorach X_i (grupę G nazywamy doskonałą, jeżeli pokrywa się ze swoim komutantem $G' = [G, G]$). W szczególności nie była znana żadna konstrukcja skończonego zbioru topologicznych generatorów dla splotu $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$ grup abelowych. Konstrukcje te opierały się wyłącznie na automorfizmach ukorzenionych i skierowanych, co implikowało, że uzyskane zbiory były dalekie od minimalnych (wyjątek stanowiły tu jedynie dwie specyficzne konstrukcje dla splotów grup alternujących, tj. wspomniana wyżej konstrukcja M. Bhattacharjee oraz wymieniona niżej konstrukcja Wilsona dwóch automorfizmów skierowanych w splocie grup alternujących $Alt(n_i)$ stopnia $n_i \geq 29$). Poza tym pojęcie automatu nie było wykorzystywane do opisu tych zbiorów i problem istnienia automatu minimalnego lub prawie minimalnego dla danego splotu nie był rozpatrywany. Dowodzono natomiast, że grupy generowane przez skonstruowane zbiory, oprócz tego, że są gęste w odpowiednim splocie, spełniają też inne własności. Dzięki temu odkryto ciekawe własności skończenie generowanych grup skończenie aproksymowalnych i rozstrzygnięto kilka hipotez odnośnie tych grup.

Pionierska była tu konstrukcja P. M. Neumann'a ([63]) skończenie generowanej, doskonałej grupy G typu just-infinite, izomorficznej ze splotem permutacyjnym $G \wr Alt(6)$. W pracy tej Neumann udowodnił, że każda sub-normalna podgrupa grupy G jest izomorficzna ze skończoną potęgą prostą grupy G, a ponadto można zbudować z takich sub-normalnych podgrup nieskończony łańcuch ściśle wznoszący. Uzyskano dzięki temu nowe przykłady grup atomicznych (minimalnych) w odniesieniu do relacji *wielkości grup* zdefiniowanej przez S. J. Pride'a.

D. Segal ([70]) skonstruował grupę generowaną przez 4-elementowy zbiór (dwa automorfizmy ukorzenione i dwa automorfizmy 1-skierowane) topologicznych generatorów splotu $\wr_{i=1}^{\infty} PSL_2(p_i)$ z odpowiednio dobranym ciągiem $(p_i)_{i \geq 1}$ różnych liczb pierwszych i w rezultacie obalił przypuszczenie Lubotzky'ego-Pybera-Shaleva, dotyczące tzw. wzrostu podgrupowego skończenie generowanych grup. W tej samej pracy udowodnił także (również w oparciu o automorfizmy ukorzenione i 1-skierowane), że jeżeli (G_i, X_i) są nieabelowymi prostymi przechodnimi grupami, spełniającymi warunek $Stab_{G_i}(x) \neq Stab_{G_i}(y)$ dla $x \neq y$, to splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ zawiera 63-generowaną gęstą podgrupę G typu just-infinite, która ma własność kongruencji podgrup, tzn. każda jej podgrupa K skończonego indeksu zawiera stabilizator $Stab_G(n)$ dla pewnego $n \geq 1$ (n zależne od K). Jako wniosek otrzymał, że wszystkie skończone obrazy homomorficzne grupy G odpowiadają obrazom homomorficznym skończenie iterowanych splotów $\wr_{i=1}^{n} G_i$ $(n \geq 1)$, a proskończone uzupełnienie $\widehat{G}$ jest izomorficzne z domknięciem topologicznym $\overline{G}$, czyli ze splotem $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$. W oparciu o to pokazał, że dla każdej niepustej rodziny $\mathcal{C}$ nieabelowych prostych grup skończonych istnieje 63-generowana grupa typu just-infinite, której zbiór górnych faktorów kompozycyjnych pokrywa się dokładnie z $\mathcal{C}$ (górnym faktorem kompozycyjnym danej grupy nazywamy faktor kompozycyjny jej skończonego obrazu homomorficznego).

J. S. Wilson ([81, 82]) rozważał pewne specyficzne pary generatorów (eligible pairs) grup alternujących $Alt(m)$ stopnia $m \geq 29$. W oparciu o nie skonstruował dwa automorfizmy skierowane, rzędów 2 i 3, które generują grupę doskonałą G, izomorficzna ze splotem $G \wr Alt(m)$. Pozwoliło mu to rozwiązać wspomniany wcześniej problem Gromova. Tego typu pary wykorzystał także J. Brieussel ([20]) do konstrukcji dwóch automorfizmów skierowanych rzędów 2 i 3 w splocie $\wr_{i=1}^{\infty} Alt(n_i)$ grup alternujących stopnia $n_i \geq 29$, otrzymując w tym splocie 2-generowaną gęstą podgrupę o wzroście pośrednim.

Bardziej uniwersalną i geometryczną konstrukcję przedstawił Bondarenko ([15]). Rozważał mianowicie dowolną przechodnią grupę permutacji (H, X), która jest doskonała i nie działa na X w sposób wolny. W oparciu o jej dowolny zbiór generatorów $\{h_1, \ldots, h_m\}$ zdefiniował dla każdego $1 \leq j \leq m$ automorfizmy $r_j, d_j \in \wr_{i=1}^{\infty} H^{(i)}$ poprzez ich etykietki $\sigma_{r_j,w}$, $\sigma_{d_j,w}$ $(w \in X^*)$, w następujący sposób:

$$\sigma_{r_j,w} := \begin{cases} h_j, & w = \epsilon, \\ id_X, & w \neq \epsilon, \end{cases} \quad \sigma_{d_j,w} := \begin{cases} h_j, & w = x_1^i x_2,\ i \geq 0, \\ id_X, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $x_1, x_2 \in X$ są dowolnie wybranymi literami o różnych stabilizatorach (stąd założenie, że H nie działa w sposób wolny). W szczególności r_j jest automorfizmem ukorzenionym, a d_j – automorfizmem 1-skierowanym o kierunku x_1^{∞}. Następnie pokazał, że zbiór $S = \{r_1, \ldots, r_m, d_1, \ldots, d_m\}$ generuje topologicznie splot $\wr_{i=1}^{\infty} H^{(i)}$, a grupa $G := \langle S \rangle$ jest regularnie rozgałęzioną nad samą sobą grupą just-infinite, która ma własność kongruencji i posiada podgrupy maksymalne nieskończonego indeksu. Jest to jedyny znany do tej pory przykład grupy rozgałęzionej posiadającej podgrupy maksymalne nieskończonego indeksu (np. w grupie Grigorchuka każda maksymalna podgrupa ma indeks 2).

2 Opis cyklu prac [H1]-[H8] wchodzących w skład osiągnięcia naukowego

Opisane wcześniej rezultaty, dotyczące skończonej topologicznej generowalności splotów $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$, zainspirowały mnie do dalszego (już po zakończeniu pracy doktorskiej) zgłębiania tego tematu. Wykorzystywałem w tym celu zarówno geometryczny opis grupy $Aut(X^*)$, analizując portrety odpowiednio skonstruowanych automorfizmów, jak i kombinatoryczny język automatów, bazujący na pojęciu rekursji splotowej. Pozwoliło mi to otrzymać jawne i proste w opisie, a jednocześnie całkiem uniwersalne konstrukcje skończonych zbiorów topologicznych generatorów dla tych splotów. W szczególności uzyskałem wyniki w następujących tematach:

- konstruowanie automatów minimalnych i prawie minimalnych dla splotów $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$,
- wyprowadzanie algebraicznych i geometrycznych własności grup generowanych przez skonstruowane zbiory/automaty,
- charakteryzacja ciągów $(G_i, X_i)_{i \geq 1}$, dla których splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest generowany przez pojedynczy automat nad alfabetem $X = (X_i)_{i \geq 1}$.

Prace **[H1]–[H8]** zawierają rozwiązania następujących problemów:

- skonstruowanie minimalnego automatu Mealy'ego dla nieskończonej potęgi splotowej nietrywialnej grupy (w tym dla nieskończonej potęgi splotowej dowolnej grupy alternującej $Alt(n)$ stopnia $n \geq 5$) (**[H5]**),
- znalezienie uniwersalnej, prawie minimalnej realizacji automatowej dla splotów $\wr_{i=1}^{\infty} H_i$ skończonych nieabelowych grup prostych; badanie algebraicznych i geometrycznych własności grupy generowanej przez skonstruowany automat (**[H6]**),
- wyznaczenie rangi splotu $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$ dowolnych skończonych grup abelowych i skonstruowanie skończonego zbioru topologicznych generatorów dla takiego splotu (**[H1], [H2], [H4]**),
- wprowadzenie pojęcia automorfizmu jednorodnego i jego pęknięcia oraz skonstruowanie (w oparciu o automorfizmy tego typu) uniwersalnego topologicznego rozkładu splotu $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$ skończonych grup abelowych na dwie izomorficzne abelowe grupy wolne; badanie własności grupy generowanej przez sumę mnogościową tych dwóch abelowych grup wolnych (**[H3]**),
- wyprowadzenie ogólnego kryterium na średniowalność grupy generowanej przez dowolny zbiór automorfizmów jednorodnych i ich pęknięć (**[H8]**),
- charakteryzacja ciągów $(G_i, X_i)_{i \geq 1}$ przechodnich grup permutacji, dla których splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest generowany przez automat nad alfabetem $X = (X_i)_{i \geq 1}$; podanie jawnej, uniwersalnej konstrukcji automatowej dla każdego takiego ciągu i oszacowanie przy jej pomocy rangi splotu $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ oraz liczby stanów w odpowiednim automacie optymalnym (**[H7]**),
- charakteryzacja ciągów $(G_i)_{i \geq 1}$ przechodnich grup permutacji zbioru X, dla których splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest generowany przez automat Mealy'ego nad alfabetem X (**[H7]**).

Konstrukcje z prac [H2] i [H6] są na tyle uniwersalne, że można je stosować do dowolnych ciągów $(H_i, X_i)_{i\geq 1}$ nieabelowych przechodnich grup prostych i dowolnych ciągów $(A_i, X_i)_{i\geq 1}$ abelowych grup przechodnich, dla których splot $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$ jest topologicznie skończenie generowany. Ponadto w przypadku grup nieabelowych, skonstruowany zbiór jest zawsze minimalny, a w przypadku grup abelowych, konstrukcja uzyskana w pracy [H2] jest minimalna, o ile grupa A_1 jest cykliczna.

2.1 Automaty dla potęg splotowych grup doskonałych – praca [H5]

Nieskończona potęga splotowa $\wr_{i=1}^{\infty} H^{(i)}$ przechodniej grupy permutacji (H, X) skończonego zbioru X jest topologicznie skończenie generowana wtedy i tylko wtedy, gdy H jest doskonała ([15]). Gdy dodatkowo założymy, że H nie działa na X w sposób wolny, to wcześniej opisana konstrukcja Bondarenki przynosi dla tej potęgi skończony zbiór $S = \{r_1, \ldots, r_m, d_1, \ldots, d_m\}$ topologicznych generatorów. Jeżeli $m := d(H)$, to każdy automorfizm ukorzeniony r_j ma dokładnie dwie sekcje: r_j i id_{X^*}, a każdy automorfizm skierowany d_j – trzy sekcje: d_j, r_j i id_{X^*}. Można zatem skonstruować taki automat Mealy'ego $A = (\mathcal{S}, X, \varphi, \psi)$ o $(2m+1)$-elementowym zbiorze stanów

$$\mathcal{S} := \{R_1, \ldots, R_m, D_1, \ldots, D_m, Id\},$$

że zachodzą równości $\widetilde{R_j} = r_j$, $\widetilde{D_j} = d_j$ dla $1 \leq j \leq m$ oraz $\widetilde{Id} = id_{X^*}$. Formalnie, przejścia i wyjścia w automacie $A = (\mathcal{S}, X, \varphi, \psi)$ definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} \varphi(D_j, x) &= \begin{cases} D_j, & x = x_1, \\ R_j, & x = x_2, \\ Id, & x \in X \setminus \{x_1, x_2\}, \end{cases} \qquad \varphi(R_j, x) = \varphi(Id, x) = Id, \\ \psi(Id, x) &= \psi(D_j, x) = x, \quad \psi(R_j, x) = h_j(x) \end{aligned}$$

dla dowolnych $1 \leq j \leq m$ i $x \in X$. Oczywiście automat A generuje $\wr_{i=1}^{\infty} H^{(i)}$. Nie jest to jednak automat minimalny, bo gdy H jest prosta, to $|\mathcal{S}| = 5$, a $d(\wr_{i=1}^{\infty} H^{(i)}) = 2$. Otwarte pozostaje pytanie, czy dla jakiejś innej grupy H konstrukcja ta daje automat minimalny bądź optymalny.

Problem istnienia minimalnego automatu Mealy'ego dla nieskończonej potęgi splotowej nietrywialnej grupy rozwiązałem w pracy [H5] (rozdziały 3–4). Rozwiązanie to oparłem na automorfizmach zupełnie innego typu. W tym celu rozważałem grupy doskonałe (H, X), które są k-tranzytywne $(k \geq 1)$ i mogą być generowane przez takie dwie permutacje, że jedna z nich (oznaczmy ją przez β) ma w rozkładzie na rozłączne cykle wszystkie cykle tej samej długości, liczba tych cykli wynosi k, a ponadto każdy z nich zawiera punkt stały drugiego generatora (oznaczmy go przez α). Niech $X' \subseteq X$ będzie zbiorem tych wyróżnionych punktów stałych generatora α.

Twierdzenie 5 ([H5], Theorem 3) *Automat Mealy'ego $A = (\{a, b\}, X, \varphi, \psi)$ zdefiniowany następująco:*

$$\varphi(s, x) = \begin{cases} a, & s = a, \ x \in X', \\ b, & s = b \text{ lub } x \notin X', \end{cases} \qquad \psi(a, x) = \alpha(x), \quad \psi(b, x) = \alpha \circ \beta(x),$$

generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} H^{(i)}$. W szczególności A jest automatem minimalnym dla tego splotu.

Powyższą konstrukcję zastosowałem ([H5], Proposition 5) do grup alternujących, jako że dla każdego $n \geq 5$ mamy równość: $Alt(n) = \langle \alpha_n, \beta_n \rangle$, gdzie

$$\alpha_n := (1, 2, 3), \quad \beta_n := \begin{cases} (1, 2, \ldots, n), & 2 \nmid n, \\ (1, 3, \ldots, n-1) \circ (2, 4, \ldots, n), & 2 \mid n. \end{cases}$$

Dowód, że permutacje α_n i β_n generują $Alt(n)$ znajduje się w pracy [P4] (opis tej pracy jest na str. 43).

Stosując identyczne rozumowanie jak w ([H5], Proposition 5), możemy rozszerzyć powyższą konstrukcję na dowolny ciąg $(Alt(m_i))_{i\geq 1}$ grup alternujących stopnia $m_i \geq 5$. W rezultacie otrzymujemy automat minimalny dla podgrupy $Aut_e(X^*) \leq Aut(X^*)$ automorfizmów parzystych.

Twierdzenie 6 *Jeżeli $X = (X_i)_{i\geq 1}$ jest zmiennym alfabetem, przy czym $|X_i| \geq 5$ dla każdego $i \geq 1$, to istnieje 2-stanowy automat A nad alfabetem X, który generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} Alt(X_i)$. Jeżeli oznaczymy $X_i := \{1, \ldots, m_i\}$ dla $i \geq 1$, to automat A można zdefiniować następująco:*

$$A = (\{a, b\}, (X_i)_{i\geq 1}, (\varphi_i)_{i\geq 1}, (\psi_i)_{i\geq 1}),$$

gdzie funkcje przejść i wyjść definiujemy następująco:

$$\varphi_i(s,x) = \begin{cases} a, & s = a,\ x = m_i, \\ a, & s = a,\ x = m_i - 1,\ 2 \mid m_i, \\ b, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases} \qquad \psi_i(a,x) = \alpha_{m_i}(x), \quad \psi_i(b,x) = \alpha_{m_i} \circ \beta_{m_i}(x).$$

2.2 Metoda rekursji splotowych – praca [H6]

W pracach [H3], [H5] i [H6] do badania grup generowanych przez skonstruowane tam automaty zastosowałem m.in. metodę rekursji splotowych. W przypadku automatów Mealy'ego stanowi ona popularne narzędzie do badania grup generowanych przez te automaty. Rozszerzenie tej metody na dowolne automaty zmienne w czasie wprowadziłem, w całej ogólności, w pracy [H6], choć po raz pierwszy ideę tę zastosowałem przy konstrukcjach z prac [D5] i [H3].

W metodzie rekursji splotowych rozważam i-te przejście ($i \geq 1$) automatu $A = (S, X, \varphi, \psi)$, czyli automat

$$A_i := (S, (X_j)_{j\geq i}, (\varphi_j)_{j\geq i}, (\psi)_{j\geq i}).$$

Oznaczmy przez $(s)_i$ przekształcenie automatowe definiowane przez stan $s \in S$ automatu A_i. W szczególności mamy $(s)_i \in Aut(X^*_{(i)})$ (w dalszym ciągu, badając konkretne przykłady automatów A, będziemy pisać po prostu s_i zamiast $(s)_i$, a w przypadku, gdy A jest automatem Mealy'ego, będziemy utożsamiać dowolny jego stan s z przekształceniem definiowanym przez ten stan). Oznaczmy

$$S := \{\mathrm{s}_1, \ldots, \mathrm{s}_k\}, \quad X_i := \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,m_i}\}, \quad i \geq 1. \tag{3}$$

Zgodnie z definicją przekształcenia automatowego, możemy zbudować następujący nieskończony ciąg $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_i)_{i\geq 1}$ skończonych układów $\mathcal{R}_i$ rekursji splotowych dla generatorów

$$(\mathrm{s}_1)_i, \ldots, (\mathrm{s}_k)_i \in Aut(X^*_{(i)})$$

grupy $G(A_i)$ generowanej przez automat A_i:

$$\mathcal{R}_i\colon \begin{cases} (\mathrm{s}_1)_i &= ((\mathrm{q}_{i,1,1})_{i+1}, (\mathrm{q}_{i,1,2})_{i+1}, \ldots, (\mathrm{q}_{i,1,m_i})_{i+1})\pi_{i,1}, \\ (\mathrm{s}_2)_i &= ((\mathrm{q}_{i,2,1})_{i+1}, (\mathrm{q}_{i,2,2})_{i+1}, \ldots, (\mathrm{q}_{i,2,m_i})_{i+1})\pi_{i,2}, \\ \vdots & \quad \vdots \\ (\mathrm{s}_k)_i &= ((\mathrm{q}_{i,k,1})_{i+1}, (\mathrm{q}_{i,k,2})_{i+1}, \ldots, (\mathrm{q}_{i,k,m_i})_{i+1})\pi_{i,k}, \end{cases} \qquad i \geq 1, \tag{4}$$

gdzie $\mathrm{q}_{i,j,r} := \varphi_i(\mathrm{s}_j, x_{i,r}) \in S$, $\pi_{i,j} := \sigma_{\mathrm{s}_j,i} \in Sym(X_i)$ dla $1 \leq j \leq k$, $1 \leq r \leq m_i$. Na odwrót, dla dowolnego skończonego zbioru symboli S i zmiennego alfabetu $X = (X_i)_{i\geq 1}$, określonych jak w (3), ciąg $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_i)_{i\geq 1}$ układów (4), gdzie $\mathrm{q}_{i,j,r} \in S$, $\pi_{i,j} \in Sym(X_i)$, definiuje jednoznacznie pewien automat A nad alfabetem $X = (X_i)_{i\geq 1}$ i ze zbiorem S jako zbiorem stanów. Automat ten będziemy zapisywać jako

$$A = (S, X, \mathcal{R}),$$

a ciąg $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_i)_{i\geq 1}$ nazywać systemem rekursji splotowej automatu A. Jeżeli A jest automatem Mealy'ego, to ciągi $(A_i)_{i\geq 1}$ i $(\mathcal{R}_i)_{i\geq 1}$ są stałe i dostajemy tylko jeden układ rekursji splotowych:

$$\mathcal{R}\colon \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{s}_1 & = & (\mathrm{q}_{1,1}, \mathrm{q}_{1,2}, \ldots, \mathrm{q}_{1,m_1})\pi_1, \\ \mathrm{s}_2 & = & (\mathrm{q}_{2,1}, \mathrm{q}_{2,2}, \ldots, \mathrm{q}_{2,m_1})\pi_2, \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{s}_k & = & (\mathrm{q}_{k,1}, \mathrm{q}_{k,2}, \ldots, \mathrm{q}_{k,m_1})\pi_k, \end{array} \right.$$

gdzie $\mathrm{q}_{j,r} := \varphi(\mathrm{s}_j, x_{1,r})$, $\pi_j := \sigma_{\mathrm{s}_j}$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq r \leq m_1$.

Przykładowo, $(2m+1)$-stanowy automat Mealy'ego dla konstrukcji Bondarenki z poprzedniego rozdziału można opisać następującym układem $\mathcal{R}$ rekursji splotowych (zakładamy, że litery x_1 i x_2 znajdują się, odpowiednio, na pierwszej i drugiej pozycji alfabetu X):

$$\mathcal{R}\colon \left\{ \begin{array}{lcl} Id & = & (Id, Id, Id, \ldots, Id), \\ R_1 & = & (Id, Id, Id, \ldots, Id)h_1, \\ \vdots & & \vdots \\ R_m & = & (Id, Id, Id, \ldots, Id)h_m, \\ D_1 & = & (D_1, R_1, Id, \ldots, Id), \\ \vdots & & \vdots \\ D_m & = & (D_m, R_m, Id, \ldots, Id). \end{array} \right.$$

Natomiast automat minimalny A z twierdzenia 6 można przedstawić jako automat

$$A = (\{a, b\}, X, \mathcal{R}),$$

w którym system $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_i)_{i\geq 1}$ rekursji splotowych jest postaci:

$$\mathcal{R}_i\colon \left\{ \begin{array}{l} a_i = (b_{i+1}, \ldots, b_{i+1}, c_{i+1}, a_{i+1})\alpha_{m_i}, \\ b_i = (b_{i+1}, \ldots, b_{i+1}, b_{i+1}, b_{i+1})\alpha_{m_i} \circ \beta_{m_i}, \end{array} \right. \qquad i \geq 1,$$

gdzie $c_{i+1} := \left\{ \begin{array}{ll} a_{i+1}, & 2 \mid m_i, \\ b_{i+1}, & 2 \nmid m_i. \end{array} \right.$

W metodzie rekursji splotowych badam relacje między elementami grup $G(A_i)$ $(i \geq 1)$ i ich sekcjami. W tym celu rozpatruję te elementy jako słowa grupowe W nad odpowiednim zbiorem generatorów jako alfabetem i stosowałem do tych słów metody kombinatoryczne w oparciu o pojęcie sekcji $W_{\{w\}}$ na dowolnym słowie $w \in X^*_{(i)}$. Przy definicji sekcji $W_{\{w\}}$ traktuję zbiór generatorów

$$S_i := \{(\mathrm{s}_1)_i, \ldots, (\mathrm{s}_k)_i\}, \quad i \geq 1$$

grupy $G(A_i)$ jako zbiór liter, tzn. jako bazę grupy wolnej $F(S_i)$ rangi k. Rozważając następnie równości (4), wykorzystuję fakt, że dowolne słowo grupowe $W \in F(S_i)$ jest iloczynem pewnych ich lewych stron bądź ich odwrotności. Zatem W definiuje jednoznacznie iloczyn pewnych ich prawych stron bądź ich odwrotności. Obliczając ten iloczyn zgodnie z formułami (1)–(2), otrzymuję relację

$$W = (V_1, \ldots, V_{m_i})\pi$$

dla pewnych słów grupowych $V_r \in F(S_{i+1})$ $(1 \leq r \leq m_i)$ i permutacji $\pi \in Sym(X_i)$. Słowa V_r są wyznaczone jednoznacznie ze słowa W i systemu $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_i)_{i\geq 1}$. Zatem nie są one z reguły zredukowane. Mogą więc zawierać podsłowa trywialne, tzn. słowa postaci $(\mathrm{s}_j)_{i+1}^{\eta}(\mathrm{s}_j)_{i+1}^{-\eta}$ $(\eta \in \{-1, 1\}, 1 \leq j \leq k)$ oraz słowa długości jeden $(\mathrm{s}_j)_{i+1}^{\eta}$, które definiują identyczność $id_{X^*_{(i)}}$ (nie wykluczamy bowiem istnienia stanów trywialnych w automacie A_{i+1}). Usuwając kolejno ze słowa V_r $(1 \leq r \leq m_i)$ wszystkie tego typu podsłowa trywialne, dostaję jednoznaczną i zredukowaną postać tego słowa, którą oznaczam przez $\widehat{V_r}$ i nazywam sekcją słowa W na literze $x_{i,r} \in X_i$ (wyznaczoną przez system $\mathcal{R}$). Sekcję $W_{\{w\}} \in F(S_{i+|w|})$ słowa grupowego $W \in F(S_i)$ na dowolnym słowie $w \in X^*_{(i)}$ definiuję teraz w sposób rekurencyjny: $W_{\{\epsilon\}} := \widehat{W}$ oraz $W_{\{vx\}} = (W_{\{v\}})_{\{x\}}$ dla dowolnych $v \in X^*_{(i)}$, $x \in X_{i+|v|}$.

Jeżeli jakieś słowo grupowe $W \in F(S_i)$ definiuje automorfizm $g \in Aut(X^*_{(i)})$, to dla każdego $w \in X^*_{(i)}$ sekcja $W_{\{w\}} \in F(S_{i+|w|})$ definiuje automorfizm $g_{\{w\}} \in Aut(X^*_{(i+|w|)})$. Dostajemy również:

$$(WV)_{\{w\}} = \widehat{W_{\{w\}}V_{\{w'\}}}, \; (W^{-1})_{\{w\}} = (W_{\{w''\}})^{-1} \tag{5}$$

dla dowolnych $W, V \in F(S_i)$ i $w \in X^*_{(i)}$, przy czym $w' := W(w)$, $w'' := W^{-1}(w)$. Ponadto relacja $v \prec w$ implikuje $|W_{\{w\}}| \leq |W_{\{v\}}|$.

Definicja 11 Słowo $W \in F(S_1)$ definiujące element neutralny nazywamy słowem znikającym, jeżeli istnieje takie $n \geq 0$, że $W_{\{w\}} = \epsilon$ dla każdego $w \in X^n$. Najmniejszą liczbę $n \geq 0$ o tej własności nazywamy głębokością słowa W i oznaczamy przez $\lambda(W)$.

Wobec (5) głębokość $\lambda\colon F(S_1) \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ ma następujące własności:

$$\lambda(W) = \lambda(\widehat{W}) = \lambda(W^{-1}) = \lambda(U^{-1}WU), \quad \lambda(WV) \leq \max\{\lambda(W), \lambda(V)\} \tag{6}$$

dla dowolnych $U, V, W \in F(S_1)$. Oczywiście nie każde słowo definiujące element neutralny w $G(A)$ musi być znikające. Stosując relacje (6), otrzymałem następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 1 ([H6], Proposition 3) *Jeżeli dla grupy $G(A)$ generowanej przez automat $A = (S, X, \mathcal{R})$ spełnione są następujące dwa warunki:*

(i) słowa znikające wyczerpują wszystkie możliwe słowa definiujące element neutralny,

(ii) wśród słów znikających istnieją słowa o dowolnie dużej głębokości,

to $G(A)$ nie jest skończenie prezentowalna.

Istotnie, przypuśćmy nie wprost, że $R \subseteq F(S_1)$ jest skończonym zbiorem relacji definiujących grupę $G(A)$. Wobec warunku (i), dla każdego niepustego i zredukowanego słowa $W \in F(S_1)$, definiującego element neutralny, istnieje takie $n \geq 1$ oraz słowa $V_i \in F(S_1)$, $U_i \in R \cup R^{-1}$ $(1 \leq i \leq n)$, że W jest równoważne słowu $V_1U_1V_1^{-1} \cdot \ldots \cdot V_nU_nV_n^{-1}$ (tzn. powstaje z niego przez usuwanie kolejno ewentualnych podsłów trywialnych $(\mathrm{s}_j)_1^{\eta}(\mathrm{s}_j)_1^{-\eta}$, $\eta \in \{-1, 1\}$, $1 \leq j \leq k$). Ale wówczas, wobec własności (6), dostajemy: $\lambda(W) \leq \max_{1\leq i\leq n} U_i \leq L$, gdzie $L := \max_{U\in R} U < \infty$, czyli sprzeczność z warunkiem (ii).

Grupy generowane przez automaty nad stałym alfabetem i spełniające warunek (i) należą do szerszej klasy grup (piecewise automatically presented groups), którą badała A. Erschler ([24]). Pokazała ona, że jeżeli taka grupa ma własność Kazhdana (T), to jest skończona; jeżeli natomiast jest średniowalna i skończenie prezentowalna, to jest wirtualnie abelowa (zawiera podgrupę abelową skończonego indeksu).

W pracy [H6] wprowadziłem pojęcie automatu z rdzeniem (automaton with a path-active nucleus). W tym celu dla dowolnego zbioru $T \subseteq F(S_1)$ oznaczyłem

$$T_{(i)} := \{W_{(i)} \colon W \in T\} \subseteq F(S_i), \quad i \geq 1,$$

gdzie $W_{(i)} \in F(S_i)$ jest słowem powstałym ze słowa $W \in F(S_1)$ przez zastąpienie każdej litery $(\mathrm{s}_j)_1^\eta$ literą $(\mathrm{s}_j)_i^\eta$ $(1 \leq j \leq k,\ \eta \in \{-1, 1\})$.

Definicja 12 Automat $A = (S, X, \mathcal{R})$ nazywamy automatem z rdzeniem, jeżeli istnieje skończony zbiór $T \subseteq F(S_1)$ (zwany rdzeniem automatu) niepustych i zredukowanych słów grupowych, spełniający warunki:

(i) dla każdego $W \in F(S_1)$ istnieje takie $n \geq 0$, że $W_{\{w\}} \in T_{(n+1)} \cup \{\epsilon\}$ dla $w \in X^n$,

(ii) dla każdego $W \in T$ istnieje takie słowo $u = x_1 x_2 \ldots \in X^\omega$, że dla każdego $i \geq 1$ zachodzi: $W_{(i)}(x_i) \neq x_i$, a ponadto $(W_{(i)})_{\{x_i\}} = W_{(i+1)}$ i $(W_{(i)})_{\{x\}} = \epsilon$ dla $x \in X_i \setminus \{x_i\}$.

Stwierdzenie 2 ([H6], Proposition 5) *W grupie generowanej przez automat z rdzeniem $A = (S, X, \mathcal{R})$ jedynie słowa znikające wyznaczają element neutralny.*

Pojęcie rdzenia dla automatów zmiennych w czasie jest analogiczne do pojęcia zwężania w klasie grup samopodobnych. W szczególności każdy automat Mealy'ego z rdzeniem generuje samopodobną grupę zwężająca.

W pracy [H6] rozszerzyłem na automaty zmienne w czasie również takie pojęcia jak samoreplikowanie (self-replication, fractalness) i rozgałęzianie (branching), które dobrze funkcjonują dla samopodobnych grup rozgałęzionych ([60]). Oparłem je na obserwacji, że równości (4) definiują dla każdego $i \geq 1$ zanurzenie

$$\Psi_{i,A} \colon G(A_i) \hookrightarrow G(A_{i+1}) \wr_{X_i} Sym(X_i),$$

które na ogół nie jest izomorfizmem. Rozważmy obcięcie zanurzenia $\Psi_{i,A}$ do stabilizatora pierwszego poziomu oraz rzut $\Psi_{i,r,A} \colon Stab_{G(A_i)}(1) \to G(A_{i+1})$ tego obcięcia na r-tą $(1 \leq r \leq m_i)$ współrzędną.

Definicja 13 Jeżeli $\Psi_{i,r,A}(Stab_{G(A_i)}(1)) = G(A_{i+1})$ dla dowolnych $i \geq 1$, $1 \leq r \leq m_i$, to automat A nazywamy samo-replikującym. Jeżeli natomiast istnieje ciąg $(K_i)_{i \geq 1}$ podgrup normalnych $K_i \lhd G(A_i)$ skończonego indeksu spełniających warunek: $K_{i+1}^{m_i} \leq \Psi_{i,A}(K_i)$ dla każdego $i \geq 1$, to automat A nazywamy regularnie rozgałęzionym. Jeżeli grupy K_i są jedynie nietrywialne, to automat A nazywamy słabo regularnie rozgałęzionym.

W szczególności, jeżeli automat A jest regularnie rozgałęziony oraz grupa $G(A)$ działa sferycznie przechodnio, to grupa ta jest rozgałęziona (w sensie definicji 6), a jeżeli A jest słabo regularnie rozgałęziony, to grupa $G(A)$ jest słabo rozgałęziona. Jeżeli ponadto A jest automatem Mealy'ego, to w pierwszym przypadku grupa $G(A)$ jest regularnie rozgałęziona, a w drugim – słabo regularnie rozgałęziona (w sensie definicji 7).

W pracy [H6] wprowadziłem również pojęcie automorfizmu niemal finitarnego (nearly finitary automorphism) i grupy niemal finitarnej.

Definicja 14 Automorfizm $g \in Aut(X^*)$ nazywamy niemal finitarnym, jeżeli istnieje liczba $n := n_g \geq 0$ i skończony (być może pusty) zbiór $T := T_g \subseteq X^\omega$, taki że $T \cap Fix(g) = \emptyset$ oraz etykietki $\sigma_{g,w}$ są trywialne dla wszystkich słów $w \in X^*$ długości większej niż n, nie będących prefiksem żadnego ze słów zbioru T. Jeżeli każdy element grupy $G \leq Aut(X^*)$ jest automorfizmem niemal finitarnym, to grupę G nazywamy niemal finitarną.

Stwierdzenie 3 ([H6], Proposition 4) *Jeżeli automat $A = (S, X, \mathcal{R})$ jest automatem z rdzeniem, to grupa $G(A)$ jest niemal finitarna.*

Zbiór wszystkich automorfizmów niemal finitarnych drzewa X^* zawiera w sposób właściwy grupę automorfizmów finitarnych, która z kolei jest gęstą podgrupą w grupie $Aut(X^*)$ (automorfizm $g \in Aut(X^*)$ nazywamy finitarnym, jeżeli jego etykietki $\sigma_{g,w}$ są nietrywialne dla co najwyżej skończenie wielu słów $w \in X^*$). Zbiór ten jednak nie tworzy grupy (automorfizm odwrotny do niemal finitarnego jest co prawda niemal finitarny, ale złożenie już nie musi takie być). Z drugiej strony, zbiór automorfizmów niemal finitarnych zawarty jest w sposób właściwy w grupie automorfizmów ograniczonych drzewa X^*.

Definicja 15 Automorfizm $g \in Aut(X^*)$ nazywamy ograniczonym, jeżeli ciąg $(\xi_g(n))_{n\geq 1}$ jest ograniczony, gdzie $\xi_g(n) := |\{w \in X^n \colon g_{\{w\}} \neq id_{X^*_{(n+1)}}\}|$.

W 2010 roku V. Nekrashevych pokazał ([61]), że jeżeli alfabet $X = (X_i)_{i\geq 1}$ jest ograniczony, to grupa automorfizmów ograniczonych nie zawiera nieabelowych podgrup wolnych (w przypadku alfabetu nieograniczonego X nietrudno jest skonstruować w $Aut(X^*)$ nieabelową grupę wolną składającą sie z automorfizmów ograniczonych). Dowód oparł o następującą alternatywę:

Twierdzenie 7 (Nekrashevych, [61]) *Niech G będzie grupą działającą wiernie na nieskończonym, lokalnie skończonym drzewie T z korzeniem. Wówczas zachodzi dokładnie jedna z możliwości:*

(1) G nie zawiera nieabelowych podgrup wolnych,

(2) istnieje nieabelowa podgrupa wolna $F \leq G$ i taka nieskończona ścieżka u wychodząca z korzenia drzewa T, że $F \subseteq Stab_G(u)$, a ponadto F działa wiernie na dowolnym sąsiedztwie ścieżki u (tzn. na poddrzewie drzewa T składającym się ze wszystkich wierzchołków, które są potomkami jakiegoś ustalonego wierzchołka na ścieżce u),

(3) istnieje nieskończona ścieżka u wychodząca z korzenia drzewa T oraz taka nieabelowa grupa wolna $F \leq G$, że stabilizator $Stab_F(u)$ jest trywialny.

Powyższą alternatywę wykorzystałem do pokazania następującego stwierdzenia:

Stwierdzenie 4 ([H6], Proposition 1) *Jeżeli $X = (X_i)_{i\geq 1}$ jest dowolnym (ograniczonym lub nieograniczonym) alfabetem oraz $G \leq Aut(X^*)$ jest grupą niemal finitarną, to G nie zawiera nieabelowych podgrup wolnych.*

Uwaga 4 Metoda rekursji splotowej, choć użyteczna, jest często bezradna nawet wobec prostych automatów. Przykładowo, o grupie generowanej przez 2-stanowy automat Mealy'go $A = (\{a, b\}, \{1, 2, 3\}, \mathcal{R})$ z systemem rekursji

$$\mathcal{R}\colon \begin{cases} a = (a, b, a)(1, 2, 3), \\ b = (a, a, b)(1, 2), \end{cases}$$

nie wiadomo nawet, czy jest skończona (choć przypuszcza się, że jest nieskończona); automat ten (oznaczany jako $\mathcal{M}_{675}$) pojawia się w badaniach nad klasyfikacją grup generowanych przez 2-stanowe automaty Mealy'ego nad alfabetem 3-literowym ([59]).

2.3 Konstrukcja automatu $\mathcal{A}$ i własności grupy $G(\mathcal{A})$ – ciąg dalszy pracy [H6]

Niech $X = (X_i)_{i\geq 1}$ będzie zmiennym alfabetem. Głównym rezultatem pracy [H6] jest uniwersalna konstrukcja automatu prawie minimalnego dla splotu $\wr_{i=1}^{\infty} H_i$, gdzie $(H_i, X_i)_{i\geq 1}$ jest dowolnym ciągiem nieabelowych prostych przechodnich grup permutacji. Konstrukcja ta opiera się na obserwacji, że jeżeli (H, Y) jest nieabelową prostą przechodnią grupą permutacji skończonego zbioru Y, to istnieje trójka $(\alpha, \beta, y) \in H \times H \times Y$ (nazwałem ją trójką z haczykiem) spełniająca następujące warunki: $H = \langle \alpha, \beta \rangle$, $o(\alpha) = 2$, $o(\beta) = p$ dla pewnej liczby pierwszej $p \geq 3$, a ponadto w rozkładzie permutacji α i β na rozłączne cykle istnieją takie dwa nietrywialne cykle, jeden w rozkładzie α, a drugi w rozkładzie β, że y jest jedynym wspólnym elementem tych cykli. Zauważmy przede wszystkim, że istnienie takiej trójki (α, β, y) wynika bezpośrednio z istnienia elementów $\alpha, \beta \in H$ spełniających następujące dwa warunki:

(i) $H = \langle \alpha, \beta \rangle$, $o(\alpha) = 2$, $o(\beta) = p$ dla pewnej liczby pierwszej $p \geq 3$,

(ii) $p < |Y|$.

Istotnie, weźmy permutacje $\alpha, \beta \in H$ spełniające (i)–(ii) i rozważmy ich rozkłady $\alpha = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_s$, $\beta = \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_t$ na nietrywialne, rozłączne cykle. Wówczas pewna transpozycja τ_{j_0} ma dokładnie jeden wspólny element (oznaczmy go przez y) z pewnym cyklem σ_{k_0} (w przeciwnym razie nośnik każdej transpozycji τ_j albo byłby zawarty w zbiorze $Fix(\beta)$, albo w nośniku pewnego cyklu $\sigma_{j'}$, ale wówczas, wobec (ii), grupa $H = \langle \alpha, \beta \rangle$ nie byłaby przechodnia). W rezultacie (α, β, y) jest trójką z haczykiem. Obserwacja, że w grupie H istnieją elementy α, β spełniające warunek (i), to główny rezultat pracy C. S. H. King ([49]). Pokażemy, że można elementy $\alpha, \beta \in H$ dobrać w ten sposób, aby również warunek (ii) zachodził. Wybierzmy więc $\alpha, \beta \in H$ spełniające (i), przy czym dobierzmy te elementy tak, aby liczba pierwsza $p = o(\beta) \geq 3$ była możliwie najmniejsza. Mamy oczywiście $|Y| \geq 5$, $|Y| \geq p$. Jeżeli $2 \mid |Y|$, to oczywiście $p < |Y|$. Załóżmy więc, że $2 \nmid |Y|$ i przypuśćmy nie wprost, że $p = |Y|$. Zatem β jest długim cyklem (tzn. cyklem długości $|Y|$). Skorzystajmy teraz z następującego lematu:

Lemat 1 ([H6], Lemma 1) *Każda skończona grupa permutacji, zawierająca długi cykl i będąca grupą prostą, jest prymitywna.*

Znana jest następująca klasyfikacja prymitywnych grup permutacji zawierających długi cykl (w poniższym twierdzeniu używamy standardowych oznaczeń dla grupy afinicznej $AGL_k(q)$ stopnia k nad ciałem q-elementowym, projektywnej grupy liniowej $PGL_k(q)$, projektywnej semi-liniowej grupy $P\Gamma L_k(q)$, projektywnej specjalnej grupy liniowej $PSL_k(q)$ i grup Mathieu M_{11}, M_{23}).

Twierdzenie 8 ([44]) *Jeżeli G jest prymitywną grupą permutacji stopnia m, zawierającą cykl długości m, to zachodzi jedna z poniższych możliwości:*

- $G \leq AGL_1(m)$, *gdzie m jest liczbą pierwszą,*
- $G = Alt(m)$ *lub* $G = Sym(m)$,
- $PGL_k(q) \leq G \leq P\Gamma L_k(q)$, *gdzie $k \geq 2$, q jest liczbą pierwszą,* $m = (q^k - 1)/(q - 1)$,

- $m = 11$ *oraz* $G = PSL_2(11)$ *lub* $G = M_{11}$,

- $m = 23$, $G = M_{23}$.

W powyższym twierdzeniu, jeżeli $m := p$ jest liczbą pierwszą, to $AGL_1(m)$ zawiera jedyną grupę cykliczną rzędu m, która jest jej podgrupą normalną. Grupa $PGL_k(q)$ jest podgrupą normalną grupy $P\Gamma L_k(q)$ i jest ona prosta wtedy i tylko wtedy, gdy $NWD(k, q-1) = 1$ i $(k, q) \neq (2, 2)$, co implikuje $PGL_k(q) = PSL_k(q)$. W rezultacie, ponieważ H jest nieabelowa i prosta, to mamy następujące możliwości:

- $H = Alt(p)$ lub
- $p = 23$ i $H = M_{23}$ lub
- $p = 11$ i $H = M_{11}$ lub
- $p = 11$ i $H = PSL_2(11)$ lub
- $p = (q^k - 1)/(q - 1)$ i $H = PSL_k(q)$, gdzie $k \geq 2$, a q jest potęgą liczby pierwszej, spełniającą warunek $NWD(k, q-1) = 1$.

Wystarczy teraz zauważyć, że grupa $PSL_2(11)$, a także grupy $Alt(p)$ dla $p \neq 7$ oraz grupy $PSL_k(q)$ z parametrami k i q jak wyżej, są generowane przez inwolucję i element rzędu 3, natomiast grupy $Alt(7)$, M_{11} i M_{23} – przez inwolucję i element rzędu 5 ([49, 66]). W każdym z tych przypadków mamy więc sprzeczność z minimalnością p.

Dla każdego $i \geq 1$ weźmy teraz dowolną trójkę z haczykiem

$$(\alpha_i, \beta_i, x_i) \in H_i \times H_i \times X_i$$

oraz rozważmy 3-stanowy automat $\mathcal{A} = (\{a, b, id\}, (X_i)_{i\geq 1}, (\mathcal{R}_i)_{i\geq 1})$ z następującym systemem $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_i)_{i\geq 1}$ rekursji splotowych:

$$\mathcal{R}_i\colon \begin{cases} a_i &= (a_{i+1}, id_{i+1}, \ldots, id_{i+1})\alpha_i, \\ b_i &= (b_{i+1}, id_{i+1}, \ldots, id_{i+1})\beta_i, \qquad i \geq 1, \\ id_i &= (id_{i+1}, id_{i+1}, \ldots, id_{i+1}), \end{cases} \tag{7}$$

przy czym zakładamy uporządkowanie zbiorów X_i ($i \geq 1$) w ten sposób, że na pierwszej pozycji występuje litera $x_i \in X_i$ z trójki (α_i, β_i, x_i).

Zauważmy od razu, że choć wszystkie nietrywialne etykietki automorfizmów $\widetilde{a}$ i $\widetilde{b}$ są umieszczone na słowie $x_1x_2x_3\ldots \in X^\omega$, to automorfizmy te nie są skierowane – nie stabilizują bowiem tego słowa.

Twierdzenie 9 ([H6], Theorem 1) *Przekształcenia $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in Aut(X^*)$ zdefiniowane przez stany a i b automatu $\mathcal{A}$ generują topologicznie splot $\wr_{i=1}^{\infty} H_i$. W szczególności $\mathcal{A}$ jest automatem prawie minimalnym dla splotu $\wr_{i=1}^{\infty} H_i$.*

Dla dowodu powyższego twierdzenia rozważam i-te przejście $\mathcal{A}_i = (\{a, b, id\}, (X_l)_{l\geq i}, (\mathcal{R}_l)_{l\geq i})$ automatu $\mathcal{A}$. Mamy oczywiście $G(\mathcal{A}_i) = \langle a_i, b_i\rangle \leq W_i$ dla każdego $i \geq 1$, gdzie $W_i := \wr_{l=i}^{\infty} H_l$. Dla $i, j \geq 1$ oznaczmy przez $W_{i,j} \leq W_i$ podgrupę powstałą z W_i przez zastąpienie permutacjami trywialnymi wszystkich etykietek $\sigma_{g,w}$ ($g \in W_i$) na słowach $w \in X_{(i)}^*$ długości $|w| \geq j$. Niech $a_{i,j}, b_{i,j} \in W_{i,j}$ będą elementami powstałymi w ten sposób z generatorów $a_i, b_i \in W_i$. Należy zatem wykazać równość $\langle a_{i,j}, b_{i,j}\rangle = W_{i,j}$ dla wszystkich $i, j \geq 1$. Stosujemy indukcje po j. Dla $j = 1$ mamy: $W_{i,1} = H_i = \langle \alpha_i, \beta_i\rangle = \langle a_{i,1}, b_{i,1}\rangle$ dla każdego $i \geq 1$. Załóżmy więc, że dla pewnego $j_0 \geq 1$ zachodzi: $W_{i,j_0} = \langle a_{i,j_0}, b_{i,j_0}\rangle$ dla każdego $i \geq 1$. Wybierzmy dowolnie $i_0 \geq 1$ i oznaczmy $g := a_{i_0,j_0+1}$, $g' := a_{i_0+1,j_0}$, $h := b_{i_0,j_0+1}$, $h' := b_{i_0+1,j_0}$, $id := id_{i_0+1}$, $\alpha := \alpha_{i_0}$, $\beta := \beta_{i_0}$. Wobec (7) mamy:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g & = & (g', id, \ldots, id)\alpha, \\ h & = & (h', id, \ldots, id)\beta. \end{array} \right. \tag{8}$$

Należy więc pokazać, że grupa W_{i_0,j_0+1} zawiera się w grupie $G := \langle g, h\rangle$ (zawieranie w drugą stronę jest oczywiste). Mamy oczywiście $W_{i_0,j_0+1} = W_{i_0+1,j_0} \wr_{X_{i_0}} H_{i_0} = W_{i_0+1,j_0}^{X_{i_0}} \rtimes H_{i_0}$, a wobec założenia indukcyjnego mamy też $W_{i_0+1,j_0} = \langle g', h'\rangle$. Ponieważ W_{i_0+1,j_0} jest grupą doskonałą, to dla każdego $f \in W_{i_0+1,j_0}$ istnieje słowo grupowe $V(x, y) \in F(x, y)$, w którym sumy wykładników przy literach x i y są obie równe 0, a ponadto $f = V(g', h')$. Wyznaczmy teraz rekursję splotową elementu $V(g^2, h^{p_{i_0}}) \in G$. Wobec rekursji (8) i konstrukcji trójki z haczykiem (α, β, x_{i_0}), dostajemy: $V(g^2, h^{p_{i_0}}) = (f, id, \ldots, id)$. Zatem $(f, id, \ldots, id) \in G$. Wobec dowolności f, dostajemy także $(g', id, \ldots, id) \in G$ i $(h', id, \ldots, id) \in G$. W rezultacie, wobec (8), dostajemy: $\alpha, \beta \in G$, a stąd $H_{i_0} \leq G$. Ponieważ grupa H_{i_0} jest przechodnia, to dostajemy również $W_{i_0+1,j_0}^{X_{i_0}} \leq G$. W konsekwencji $W_{i_0,j_0+1} \leq G$, co dowodzi tezy indukcyjnej.

W pracy [H6] wyprowadziłem też następujący rezultat

Stwierdzenie 5 ([H6], Propositions 8, 10) *Automat $\mathcal{A}$ jest automatem z 6-elementowym rdzeniem*

$$T = \{a_1, a_1^{-1}, b_1, b_1^{-1}, a_1^{-1}b_1, b_1^{-1}a_1\}.$$

W szczególności każde słowo grupowe $W \in F(\{a_1, b_1, id_1\})$ wyznaczające element neutralny w grupie $G(\mathcal{A})$ jest znikające. Co więcej, istnieją znikające słowa grupowe $W \in F(\{a_1, b_1, id_1\})$ o dowolnie dużej głębokości.

Dla dowodu drugiej części stwierdzenia 5 skonstruowałem dla każdego $i \geq 1$ słowa grupowe z liter a_i, b_i postaci:

$$W_{M,N,i} := [b_i^N a_i^{-M} b_i^{-N}, a_i^N] := b_i^N a_i^M b_i^{-N} a_i^{-M} b_i^N a_i^{-M} b_i^{-N} a_i^M,$$

gdzie wykładniki M i N spełniają podzielności $2 \mid M$, $p_i \mid N$, przy czym $p_i := o(\beta_i)$. Pokazałem, że $W_{M,N,i}(x) = x$ dla każdego $x \in X_i$, a następnie wyznaczyłem jednoliterowe sekcje:

$$(W_{M,N,i})_{\{x\}} = \left\{ \begin{array}{ll} W_{M/2,N/p_i,i+1}, & x = x_i, \\ \varepsilon, & x \neq x_i. \end{array} \right.$$

Otrzymałem stąd, że dla każdego $i \geq 1$ słowo $W_{2^{i+1},p_1p_2\ldots p_i,1}$ jest znikające, a jego głębokość jest równa $i + 1$. Jako wniosek ze stwierdzeń 1–5 dostałem:

Twierdzenie 10 ([H6], Theorems 2, 3) *Grupa $G(\mathcal{A})$ jest niemal finitarna, nie posiada skończonej prezentacji i nie zawiera nieabelowych podgrup wolnych.*

Stwierdzenie 5 zastosowałem również do pokazania, że półgrupa generowana przez przekształcenia $\widetilde{a}$ i $\widetilde{b}$ jest wolna ([H6], Proposition 9). Mianowicie, niech $W \in F(\{a_i, b_i\})$ $(i \geq 1)$ będzie zredukowanym słowem półgrupowym (tj. bez ujemnych wykładników). Indukcją ze względu na długość słowa W można pokazać (w oparciu o rekursje (7)), że jeżeli W rozpoczyna się od a_i (odp. od b_i), to sekcja $W_{\{x_i\}}$ (która jest zredukowanym słowem półgrupowym z liter a_{i+1}

i b_{i+1}) rozpoczyna się od a_{i+1} (odp. od b_{i+1}). Jedynymi słowami półgrupowymi w rdzeniu T automatu $\mathcal{A}$ są słowa a_1 i b_1. Jeżeli więc $W \in F(\{a_1, b_1\})$ jest zredukowanym słowem półgrupowym zaczynającym się od a_1 (odp. od b_1), to istnieje takie $i \geq 1$, że $W_{\{x_1 \dots x_i\}} = a_{i+1}$ (odp. $W_{\{x_1 \dots x_i\}} = b_{i+1}$). Ponieważ $a_i \neq b_i$ dla każdego $i \geq 1$, to otrzymałem, że dowolne dwa różne i zredukowane słowa półgrupowe z liter a_1 i b_1 nie mogą wyznaczać tego samego przekształcenia (można bowiem założyć, że jedno z tych słów rozpoczyna się od a_1, a drugie od b_1, albo też, że jedno jest puste, a drugie nie), czyli że półgrupa $sgp(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ jest wolna. W rezultacie otrzymałem następujący wniosek:

Wniosek 1 ([H6], Corollary 4) *Grupa $G(\mathcal{A})$ generowana przez automat $\mathcal{A}$ ma wzrost wykładniczy.*

Udowodniłem również, że automat $\mathcal{A}$ jest samo-replikujący i słabo regularnie rozgałęziony nad ciągiem komutantów $(G(\mathcal{A}_i)')_{i\geq 1}$.

Stwierdzenie 6 ([H6], Proposition 12) *Automat $\mathcal{A}$ jest samo-replikujący i słabo regularnie rozgałęziony nad ciągiem komutantów $(G(\mathcal{A}_i)')_{i\geq 1}$. W szczególności grupa $G(\mathcal{A})$ jest słabo rozgałęziona.*

Jeżeli ciąg $(H_i, X_i)_{i\geq 1}$ jest stały, to $\mathcal{A}$ jest automatem Mealy'ego. Ponadto jest to automat ograniczony, tzn. każdy jego stan definiuje automorfizm ograniczony. Pojęcie ograniczoności dla automatów Mealy'ego badał w 2000 roku S. Sidki ([71]). Grupy generowane przez automaty ograniczone tworzą podklasę w klasie samopodobnych grup zwężających. Choć problem średniowalności wszystkich grup w tej większej klasie jest nadal otwarty, to udowodniono ([7]), że grupy generowane przez ograniczone automaty Mealy'ego są średniowalne. W rezultacie dostałem następujący wniosek:

Wniosek 2 ([H6], Corollary 2) *Dla dowolnej nieskończonej potęgi splotowej $\wr_{i=1}^{\infty} H^{(i)}$ nieabelowej prostej przechodniej grupy permutacji H skończonego zbioru X istnieje prawie minimalna realizacja automatowa za pomocą 3-stanowego ograniczonego automatu Mealy'ego $\mathcal{A}$ nad alfabetem X. Grupa $G(\mathcal{A})$ generowana przez automat $\mathcal{A}$ jest średniowalną grupą wzrostu wykładniczego, nie posiadającą skończonej prezentacji, a jej obydwa generatory (odpowiadające nietrywialnym stanom automatu $\mathcal{A}$) generują półgrupę wolną. Ponadto grupa ta jest niemal finitarna, samo-replikująca, zwężająca oraz słabo regularnie rozgałęziona nad swoim komutantem.*

2.4 Generowanie splotów grup abelowych – prace [H1], [H2], [H4]

W swojej pracy doktorskiej udowodniłem (praca [D5]), że sploty $\wr_{i=1}^{\infty} C_{n_i}$ skończonych przechodnich grup cyklicznych C_{n_i} o parami względnie pierwszych rzędach, czyli spełniających warunek $NWD(n_i, n_j) = 1$ dla $i \neq j$, są topologicznie 2-generowane. Dowód opierał się na konstrukcji automatu minimalnego (tj. automatu 2-stanowego) dla takiego splotu. Po obronie zastanawiałem się nad rozszerzeniem tego wyniku na sploty $\wr_{i=1}^{\infty} C_{n_i}$ dowolnych skończonych przechodnich grup cyklicznych. W szczególności chciałem znaleźć formułę na rangę takich splotów. Nadal nie wiem, czy istnieje odpowiednia konstrukcja automatu minimalnego, ale w pracy [H1] wyprowadziłem formułę na rangę dowolnego takiego splotu oraz skonstruowałem minimalny zbiór topologicznych generatorów (sama formuła wynika po części z tej konstrukcji).

Twierdzenie 11 ([H1], Theorem 1.1) *Niech $(n_i)_{i\geq 1}$ będzie dowolnym ciągiem liczb całkowitych większych od 1. Wówczas $d(\wr_{i=1}^{\infty} C_{n_i}) = d(\prod_{i\geq 2} C_{n_i}) + 1$.*

Prawą stronę powyższej równości można wyrazić jako najmniejszą liczbę k_0 o tej własności, że największy wspólny dzielnik dowolnego k_0-elementowego podciągu ciągu $(n_i)_{i\geq 2}$ jest równy 1. Zatem twierdzenie 11 można zastosować do wyznaczania rangi skończenie iterowanego splotu $\wr_{i=1}^m C_{n_i}$ $(m \geq 1)$. Otrzymałem w szczególności oszacowanie $d(\wr_{i=1}^m C_{n_i}) \leq m$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $NWD(n_2, \ldots, n_m) > 1$. Ponadto dla każdego $m \geq 2$ można skonstruować taki nieskończony ciąg $(n_i)_{i\geq 1}$, że $d(\wr_{i=1}^\infty C_{n_i}) = m$. Przykładowo, jako n_1 bierzemy dowolną liczbę całkowitą większą od 1, a jako n_i $(i \geq 2)$ – iloczyn $p_i p_{i+1} \ldots p_{i+m-2}$, gdzie $(p_i)_{i\geq 2}$ jest dowolnym ciągiem różnych liczb pierwszych.

Oznaczmy $\rho := d(\prod_{i\geq 2} C_{n_i})$ i załóżmy, że $\rho < \infty$ (jeżeli $\rho = \infty$, to oczywiście $d(\wr_{i=1}^\infty C_{n_i}) = \infty$). Dowód twierdzenia 11 oparłem na konstrukcji $(\rho+1)$-elementowego zbioru

$$S := \{\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho\}$$

topologicznych generatorów dla splotu $\wr_{i=1}^\infty C_{n_i}$. W konstrukcji tej rozpatrywałem splot $\wr_{i=1}^\infty C_{n_i}$ jako grupę automorfizmów drzewa X^* nad zmiennym alfabetem $X = (X_i)_{i\geq 1}$, w którym $|X_i| = n_i$ dla $i \geq 1$. Element β zdefiniowałem jako automorfizm ukorzeniony, który generuje grupę cykliczną C_{n_1}. Automorfizmy α_j $(1 \leq j \leq \rho)$ skonstruowałem w ten sposób, że zbudowałem najpierw ρ-elementowe zbiory generatorów $\{a_{1,i}, \ldots, a_{\rho,i}\} \subseteq C_{n_i}$ grup C_{n_i} $(i \geq 2)$, spełniające następujący warunek: $NWD(o(a_{j,i}), o(a_{j,i'})) = 1$ dla wszystkich $1 \leq j \leq \rho$ oraz $i \neq i'$. Istnienie takich zbiorów oraz sposób ich konstrukcji wyprowadziłem w ([H1], Lemma 3.1). Następnie wybrałem dowolnie dwie litery $x_i, y_i \in X_i$ $(i \geq 1)$ i zdefiniowałem automorfizm α_j, poprzez jego etykietki, w następujący sposób: $\sigma_{\alpha_j, w_i} := a_{j,i+1}$ dla $i \geq 1$ oraz $\sigma_{\alpha_j, w} := id_{X_{|w|+1}}$ dla $w \notin \{w_1, w_2, \ldots\}$, przy czym $w_i := x_1 \ldots x_{i-1} y_i$. W szczególności wszystkie automorfizmy α_j są 1-skierowane i mają kierunek $x_1 x_2 x_3 \ldots$.

Główny ciężar dowodu twierdzenia 11 spoczywa na kilku technicznych lematach ([H1], Lemma 3.2–3.5), które pokazują, że zbiór S istotnie generuje topologicznie splot $\wr_{i=1}^\infty C_{n_i}$. W tym celu dowodziłem najpierw, że dla każdego $n \geq 0$ grupa $\langle S \rangle$ działa przechodnio na n-tym poziomie drzewa X^* (zastosowałem indukcję po n). Ustaliłem następnie $N \geq 0$ i wobec założenia $NWD(o(a_{j,i}), o(a_{j,i'})) = 1$ dla $1 \leq j \leq \rho$, $i \neq i'$, skorzystałem z chińskiego twierdzenia o resztach, aby skonstruować dla dowolnych $1 \leq i \leq N$ i $\gamma \in C_{n_i}$ element $g := g(i, \gamma) \in \langle S \rangle$, spełniający następujący warunek: $\sigma_{g, w_{i-1}} = \gamma$ i $\sigma_{g,w} = id_{X_{|w|+1}}$ dla $w \in X^{\leq N} \setminus \{w_{i-1}\}$ (przez $X^{\leq N}$ oznaczyłem zbiór słów długości nie większej niż N, przyjąłem też $w_0 := \epsilon$). Następnie dla każdego $w \in X^{\leq N}$ rozważałem poddrzewo $V_w \subseteq X^{\leq N}$ składające się ze słów, których prefiksem jest w. Wykorzystując konstrukcję elementów $g(i, \gamma)$ oraz sferyczną przechodniość grupy $\langle S \rangle$, skonstruowałem dla dowolnych $w \in X^{\leq N}$ i $\gamma \in C_{n_{|w|+1}}$ taki element $h := h(w, \gamma) \in \langle S \rangle$, że $\sigma_{h,w} = \gamma$ i $\sigma_{h,v} = id_{X_{|v|+1}}$ dla $v \in X^{\leq N} \setminus V_w$. Ustaliłem wreszcie dowolnie słowo $w \in X^{\leq N}$ i dla każdego $v \in V_w$ wybrałem dowolnie $\gamma_v \in C_{n_{|v|+1}}$. W oparciu o elementy $h(v, \gamma_v)$ skonstruowałem taki element $f_w \in \langle S \rangle$, że $\sigma_{f_w, v} = \gamma_v$ dla $v \in V_w$ i $\sigma_{f_w, v} = id_{X_{|v|+1}}$ dla $v \in X^{\leq N} \setminus V_w$. Konstrukcję elementu f_w przeprowadziłem indukcją wsteczną po $|w|$. Jeżeli bowiem $|w| = N$, to $V_w = \{w\}$ i wówczas przyjąłem $f_w := h(w, \gamma_w)$. Następnie zakładając indukcyjnie, że dla pewnego $1 \leq i \leq N$ odpowiedni element f_w można skonstruować dla wszystkich w, które spełniają $i \leq |w| \leq N$, pokazałem, w oparciu o skonstruowane elementy, jak skonstruować f_w dla dowolnego $w \in X^{i-1}$. Ponieważ dla $w := \epsilon$ mamy: $V_w = V_\epsilon = X^{\leq N}$, to wobec dowolności N dostałem, że S generuje topologicznie splot $\wr_{i=1}^\infty C_{n_i}$.

Dla dowodu, że S jest zbiorem minimalnym, tzn. $|S| = d(\wr_{i=1}^\infty C_{n_i})$, posłużyłem się formułami Lucchini'ego, uzyskanymi w 1997 roku za pomocą algebraicznej metody pochodzącej od W. Gaschütz'a, opierającej się na znajomości struktury nieredukowalnych G-modułów skończonej grupy rozwiązalnej G.

Twierdzenie 12 (Lucchini, [55]) *Jeżeli (G, X) jest przechodnią grupą permutacji skończonego zbioru X, a H jest skończoną grupą rozwiązalną, to*

$$d(H \wr_X G) = \max\left(d(H/H' \wr_X G), \left\lceil \frac{d(H)-2}{|X|} \right\rceil + 2\right).$$

Twierdzenie 13 (Lucchini, [55]) *Jeżeli (G, X) jest nilpotentną przechodnią grupą permutacji skończonego zbioru X, a A jest skończoną grupą abelową, to*

$$d(A \wr_X G) = \max_p\{d(A \times G), d(A) + 1, d_p(A) + 2\},$$

gdzie p przebiega zbiór wszystkich liczb pierwszych dzielących rząd grupy A, dla których G nie jest p-rozwiązalna, a $d_p(A)$ oznacza rangę p-podgrupy Sylowa grupy A.

Chcąc udowodnić, że S jest minimalnym zbiorem topologicznych generatorów, pokazałem nierówność $d(\wr_{i=1}^{\infty} C_{n_i}) \geq \rho + 1$. W tym celu zauważyłem, że istnieje takie $i_0 \geq 1$, że $d(A) = \rho = d(\prod_{i=2}^{\infty} C_{n_i})$, gdzie $A := \prod_{i=2}^{i_0} C_{n_i}$. Ponadto grupa $H := \wr_{i=2}^{i_0} C_{n_i}$ jest rozwiązalna oraz $H/H' \simeq A$. Zatem dla splotu $W := H \wr_{X_1} C_{n_1}$ (będącego obrazem homomorficznym splotu $\wr_{i=1}^{\infty} C_{n_i}$) dostałem z twierdzeń 12–13:

$$d(\wr_{i=1}^{\infty} C_{n_i}) \geq d(W) \geq d(H/H' \wr_{X_1} C_{n_1}) = d(A \wr_{X_1} C_{n_1}) \geq d(A) + 1 = \rho + 1.$$

W pracy [H4] rozpatrywałem zbiór $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho, \beta\}$ jako zbiór przekształceń automatowych. Zauważyłem, że dla każdego niezerowego poziomu drzewa X^* wszystkie sekcje automorfizmu β na słowach z tego poziomu są trywialne, a każde z przekształceń α_j $(1 \leq j \leq \rho)$ ma co najwyżej trzy różne sekcje, przy czym jedna z nich też jest trywialna. Zatem automorfizm β można zdefiniować za pomocą tylko jednego stanu, a każdy z automorfizmów α_j wnosi dodatkowe dwa stany – dla trywialnych sekcji automorfizmu α_j nie potrzebujemy nowego stanu, bo każdą taką sekcję możemy „powiązać” z odpowiednią trywialną sekcją automorfizmu β. W rezultacie otrzymałem automat o $2\rho + 1$ stanach, który generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} C_{n_i}$. Co prawda konstrukcja ta nie daje automatu minimalnego (ani prawdopodobnie automatu optymalnego), ale pozwala scharakteryzować sploty $\wr_{i=1}^{\infty} C_{n_i}$ jako grupy generowane przez automat.

Twierdzenie 14 ([H4], Theorem 1) *Niech $X = (X_i)_{i \geq 1}$ będzie zmiennym alfabetem; oznaczmy $n_i := |X_i|$ dla $i \geq 1$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) splot $\wr_{i=1}^{\infty} C_{n_i}$ jest generowany przez automat nad alfabetem X,

(ii) splot $\wr_{i=1}^{\infty} C_{n_i}$ jest topologicznie skończenie generowany.

W przypadku, gdy ciąg $(n_i)_{i \geq 1}$ składa się z różnych liczb pierwszych, to $\rho = 1$ i wówczas $S = \{\beta, \alpha_1\}$. E. Fink ([25]) wyprowadziła w tym przypadku pewne algebraiczne i geometryczne własności grupy $G = \langle S \rangle$. Okazuje się, że nawet w tym najprostszym przypadku nie wiadomo, czy G zawiera półgrupy wolne.

Twierdzenie 15 (Fink, [25]) *Jeżeli $(n_i)_{i \geq 1}$ jest ciągiem różnych liczb pierwszych, to grupa $G = \langle \beta, \alpha_1 \rangle$ ma następujące własności:*

(i) G jest grupą rozgałęzioną, nie ma własności kongruencji podgrup, a każda podgrupa normalna $K \triangleleft G$ jest skończenie generowana,

(ii) abelianizacja G/G' jest izomorficzna z iloczynem $C_{n_1} \times C_\infty$; w szczególności G nie jest grupą just-infinite,

(iii) G nie jest rozwiązalna, ale każdy jej właściwy iloraz G/K jest grupą rozwiązalną,

(iv) G nie ma wzrostu wielomianowego, a jeżeli $n_i > c^{(2+i)\cdot 3^{i+1}+1}$ dla pewnej stałej $c > 1$, to G ma wzrost wykładniczy; jeżeli zaś $n_i > 36^i$, to G nie zawiera nieabelowych podgrup wolnych.

W pracy [H2] rozszerzyłem pojęcia i metody z pracy [H1] do splotów $\wr_{i=1}^\infty A_i$, gdzie $(A_i, X_i)_{i\geq 1}$ jest dowolnym ciągiem abelowych przechodnich grup permutacji skończonych zbiorów X_i. Zauważyłem bowiem, że rangę $d(\wr_{i=1}^\infty A_i)$ można wyznaczyć w oparciu jedynie o formuły Lucchini'ego. Stosując indukcję po $n \geq 1$, otrzymałem z twierdzeń 12–13 następującą formułę:

$$d(\wr_{i=1}^n A_i) = \max\left\{ d(\prod_{i=1}^n A_i), 1 + d(\prod_{i=2}^n A_i) \right\}, \quad n \geq 1.$$

Zauważmy, że wszystkie trzy ciągi $(d(\wr_{i=1}^n A_i))_{n\geq 1}$, $(d(\prod_{i=1}^n A_i))_{n\geq 1}$ i $(1 + d(\prod_{i=2}^n A_i))_{n\geq 1}$ albo się stabilizują, albo zmierzają do nieskończoności ([68], Lemma 2.5.3). W rezultacie dostałem formułę na $d(\wr_{i=1}^\infty A_i)$.

Twierdzenie 16 ([H2], Theorem 1.1) *Dla dowolnego ciągu $(A_i, X_i)_{i\geq 1}$ abelowych przechodnich grup permutacji skończonych zbiorów X_i zachodzi równość*

$$d(\wr_{i=1}^\infty A_i) = \max\left\{ d(\prod_{i=1}^\infty A_i), 1 + d(\prod_{i=2}^\infty A_i) \right\}.$$

Otrzymałem też ogólniejsze kryterium na topologiczne generowanie splotów grup abelowych, za pomocą automorfizmów ukorzenionych i skierowanych. W tym celu wprowadziłem pojęcie automorfizmu ko-pierwszego.

Definicja 16 Automorfizm $g \in Aut(X^*)$ nazywamy ko-pierwszym, jeżeli dla dowolnych dwóch wierzchołków w i v z różnych poziomów drzewa X^* etykietki $\sigma_{g,w}$, $\sigma_{g,v}$ są elementami o względnie pierwszych rzędach: $NWD(o(\sigma_{g,w}), o(\sigma_{g,v})) = 1$.

Stwierdzenie 7 ([H2], Proposition 4.5) *Niech $X = (X_i)_{i\geq 1}$ będzie zmiennym alfabetem i niech $R \subseteq Aut(X^*)$ będzie dowolnym zbiorem automorfizmów ukorzenionych, a $D \subseteq Aut(X^*)$ – dowolnym (skończonym lub nieskończonym) zbiorem automorfizmów 1-skierowanych, będących jednocześnie automorfizmami ko-pierwszymi. Oznaczmy $S := R \cup D$ i niech $V_{S,i} \leq Sym(X_i)$ $(i \geq 1)$ będą grupami wierzchołkowymi zbioru S, czyli grupami określonymi następująco:*

$$V_{S,i} := \langle \sigma_{g,w} \colon g \in S, w \in X^{i-1} \rangle, \quad i \geq 1.$$

Jeżeli wszystkie grupy $V_{S,i}$ są abelowe i przechodnie, to zbiór S generuje topologicznie ich splot, czyli $\overline{\langle S \rangle} = \wr_{i=1}^\infty V_{S,i}$.

Na odwrót, niech $(A_i, X_i)_{\geq 1}$ będzie dowolnym ciągiem abelowych przechodnich grup permutacji skończonych zbiorów X_i ($|X_i| \geq 2$). Oznaczmy $\rho := d(\prod_{i=2}^\infty A_i)$ i załóżmy, że $\rho < \infty$.

Lemat 2 ([H2], Lemma 5.1) *Dla każdego $i \geq 2$ istnieje taki ρ-elementowy zbiór generatorów*

$$\{\sigma_{1,i}, \ldots, \sigma_{\rho,i}\}$$

grupy A_i, że $NWD(o(\sigma_{j,i}), o(\sigma_{j,i'})) = 1$ dla dowolnych $1 \leq j \leq \rho$ oraz $i \neq i'$.

W oparciu o zbiory generatorów z powyższego lematu, skonstruowałem automorfizmy 1-skierowane $d_1, \ldots, d_\rho \in Aut(X^*)$ w taki sposób, że dla $1 \leq j \leq \rho$ jedyna potencjalnie nietrywialna etykietka automorfizmu d_j na i-tym ($i \geq 1$) poziomie drzewa X^* jest równa $\sigma_{j,i+1}$. Niech $D := \{d_1, \ldots, d_\rho\}$. Skonstruowałem też zbiór R składający się z $d(A_1)$ automorfizmów ukorzenionych, generujący grupę A_1. W szczególności dla grup wierzchołkowych $V_{S,i}$ zbioru

$$S := R \cup D$$

dostałem: $V_{S,i} = A_i$ dla $i \geq 1$. Ponieważ automorfizmy d_j są ko-pierwsze, to wobec stwierdzenia 7 otrzymałem, że S generuje topologicznie splot $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$. Jeżeli grupa A_1 jest cykliczna, to wobec twierdzenia 16 dostałem, że zbiór S jest minimalny, tzn. $|S| = d(\wr_{i=1}^{\infty} A_i)$.

Twierdzenie 17 ([H2], Theorem 1.2) *Jeżeli grupa A_1 jest cykliczna, to skonstruowany wyżej zbiór $S = R \cup D$ jest minimalnym zbiorem topologicznych generatorów dla splotu $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$, tzn. $|S| = d(\wr_{i=1}^{\infty} A_i)$.*

Podobnie jak w przypadku grup cyklicznych, zbiór $S = R \cup D$ można wykorzystać do konstrukcji automatu generującego splot $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$. Oczywiście automat taki nie będzie minimalny.

Wniosek 3 *Oznaczmy $n := d(A_1) + 2\rho$. Wówczas istnieje n-stanowy automat A nad alfabetem $X = (X_i)_{i \geq 1}$, który generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$.*

2.5 Topologiczny rozkład na grupy abelowe wolne – praca [H3]

W pracy [H2], opisanej w poprzednim rozdziale, skonstruowałem za pomocą automorfizmów ukorzenionych i skierowanych topologiczny rozkład splotów $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$ skończonych grup abelowych na dwie skończenie generowane podgrupy abelowe, z których pierwsza (ta generowana przez automorfizmy ukorzenione) była skończona (równa A_1), zaś druga (generowana przez automorfizmy 1-skierowane) nieskończona (choć jej kanonicznego rozbicia na iloczyn prosty grup cyklicznych nie można jednoznacznie określić w oparciu o podaną tam konstrukcję).

Ogólnie powiemy, że dowolna grupa $G \leq Aut(X^*)$ rozkłada się topologicznie nad dwoma swoimi podzbiorami, jeżeli grupy generowane przez te zbiory przecinają się trywialnie, a ich suma mnogościowa generuje grupę gęstą w G.

Niech $X = (X_i)_{i \geq 1}$ będzie zmiennym alfabetem i niech $(A_i, X_i)_{i \geq 1}$ będzie dowolnym ciągiem abelowych i przechodnich grup permutacji, dla których ranga

$$\rho := d(\prod_{i \geq 1} A_i)$$

jest skończona (czyli równoważnie: $d(\wr_{i=1}^{\infty} A_i) < \infty$). W pracy [H3] znalazłem naturalny, topologiczny rozkład splotu $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$ na dwie izomorficzne grupy abelowe wolne rangi ρ. W tym celu wprowadziłem pojęcie automorfizmu jednorodnego i pojęcie pęknięcia automorfizmu.

Definicja 17 Automorfizm $g \in Aut(X^*)$ nazywamy jednorodnym, jeżeli dla każdego poziomu drzewa X^* wszystkie etykietki $\sigma_{g,w}$ na słowach w z tego poziomu są identyczne (choć etykietki na słowach z różnych poziomów mogą się różnić).

Definicja 18 Automorfizm $h \in Aut(X^*)$ nazywamy pęknięciem automorfizmu $g \in Aut(X^*)$ wzdłuż słowa $u \in X^\omega$ (a crack of an automorphism g with a cracking path $u \in X^\omega$), jeżeli portret automorfizmu h pokrywa się z portretem automorfizmu g, za wyjątkiem etykietek $\sigma_{h,w}$ na słowach $w \in X^*$ będących prefiksami u, gdzie etykietki te są wszystkie trywialne.

Układ składający się z dowolnego automorfizmu jednorodnego i jego pęknięcia można opisać 2-stanowym automatem $A = (\{a, b\}, X, \mathcal{R})$, w którym układ rekursji splotowych $\mathcal{R}_i$ $(i \geq 1)$ jest postaci:

$$\mathcal{R}_i \colon \begin{cases} a_i = (a_{i+1}, a_{i+1}, \ldots, a_{i+1})\pi_i, \\ b_i = (b_{i+1}, a_{i+1}, \ldots, a_{i+1}), \end{cases}$$

gdzie $\pi_i \in Sym(X_i)$ (w powyższych rekursjach zakładałem odpowiednie uporządkowanie liter zbiorów X_i, tzn. jeżeli $\widetilde{b}$ jest pęknięciem automorfizmu $\widetilde{a}$ wzdłuż słowa $u = x_1x_2x_3\ldots \in X^\omega$, to dla każdego $i \geq 1$ litera $x_i \in X_i$ znajduje się na pierwszej pozycji).

Stwierdzenie 8 ([H3], Proposition 3.5) *Niech $S \subseteq Aut(X^*)$ będzie zbiorem ko-pierwszych automorfizmów jednorodnych i dla każdego $s \in S$ niech $\check{s}$ będzie jakimkolwiek pęknięciem automorfizmu s. Jeżeli wszystkie grupy wierzchołkowe $V_{S,i} \subseteq Sym(X_i)$ $(i \geq 1)$ są abelowe i przechodnie, to zbiór $S \cup \{\check{s} \colon s \in S\}$ generuje topologicznie splot $\wr_{i=1}^{\infty} V_{S,i}$.*

Aby zastosować powyższe stwierdzenie do splotu $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$, skonstruowałem zbiór

$$S = \{a_1, \ldots, a_\rho\} \subseteq \wr_{i=1}^{\infty} A_i$$

spełniający warunki następującego twierdzenia:

Stwierdzenie 9 ([H3], Proposition 4.1) *Istnieje ρ-elementowy zbiór $S \subseteq \wr_{i=1}^{\infty} A_i$ automorfizmów jednorodnych, dla którego zachodzi:*

- *S składa się z automorfizmów ko-pierwszych,*
- *grupa wierzchołkowa $V_{S,i}$ pokrywa się z A_i dla każdego $i \geq 1$,*
- *grupa generowana przez S jest grupą abelową wolną rangi ρ, tzn. $\langle S \rangle \simeq C_\infty^\rho$; w szczególności zbiór S jest zbiorem wolnych generatorów dla grupy $\langle S \rangle$.*

Ustaliłem następnie nieskończone słowo

$$u_0 := x_1x_2x_3\ldots \in X^\omega$$

i dla dowolnych $1 \leq k \leq \rho$, $i \geq 1$ rozważałem sekcję $a_{k,i} \in Aut(X^*_{(i)})$ automorfizmu a_k na dowolnym słowie długości $i-1$ (wybór konkretnego słowa nie ma znaczenia, jako że automorfizm a_k jest jednorodny) oraz pęknięcie $b_{k,i}$ automorfizmu $a_{k,i}$ wzdłuż słowa $x_ix_{i+1}x_{i+2}\ldots \in X^\omega_{(i)}$. W szczególności automorfizmy $a_{k,i}$ są ko-pierwszymi automorfizmami jednorodnymi drzewa $X^*_{(i)}$. Zdefiniowałem wreszcie grupy

$$H_i := \langle S_{a,i} \rangle, \quad K_i := \langle S_{b,i} \rangle, \quad G_i := \langle S_{a,b,i} \rangle,$$

gdzie

$$S_{a,i} := \{a_{1,i}, \ldots, a_{\rho,i}\}, \quad S_{b,i} := \{b_{1,i}, \ldots, b_{\rho,i}\}, \quad S_{a,b,i} := S_{a,i} \cup S_{b,i}.$$

Ze stwierdzenia 8 dostałem od razu, że zbiór $S_{a,b,1}$ generuje topologicznie splot $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$. Podział $S_{a,b,1} = S_{a,1} \cup S_{b,1}$ definiuje poszukiwany wyżej rozkład topologiczny splotu $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$ na abelowe grupy wolne rangi ρ. Własność tę jak i inne algebraiczne i geometryczne własności grupy $G_1 = \langle S_{a,b,1}\rangle$ (a w zasadzie wszystkich grup $G_i = \langle S_{a,b,i}\rangle$ dla $i \geq 1$) wyprowadziłem w rozdziale 5 pracy [H3], otrzymując następujące twierdzenie.

Twierdzenie 18 ([H3], Theorem 5.1) *Dla każdego $i \geq 1$ zachodzi:*

(i) G_i można przedstawić jako iloczyny półproste: $G_i = H_i^{G_i} \rtimes K_i = K_i^{G_i} \rtimes H_i$, gdzie $H_i^{G_i}$ to domknięcie normalne grupy H_i w G_i,

(ii) półgrupa generowana przez $S_{a,b,i}$ jest iloczynem wolnym półgrup generowanych przez zbiory $S_{a,i}$ i $S_{b,i}$; w szczególności G_i ma wzrost wykładniczy,

(iii) $G_i/G_i' \simeq C_\infty^{2\rho}$; w szczególności $d(G_i) = 2\rho$,

(iv) grupa G_i jest beztorsyjna, słabo rozgałęziona, ma trywialne centrum, nie posiada skończonej prezentacji i nie zawiera nieabelowych podgrup wolnych.

Dla dowodu rozpatrywałem zbiór $S_{a,b,1}$ jako zbiór stanów automatu $\mathcal{B} = (S_{a,b,1}, X, \mathcal{R})$ z następującym systemem $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_i)_{i\geq 1}$ rekursji splotowych:

$$\mathcal{R}_i\colon \left\{\begin{array}{lcl} a_{1,i} & = & (a_{1,i+1}, a_{1,i+1}, \ldots, a_{1,i+1})\sigma_{1,i}, \\ a_{2,i} & = & (a_{2,i+1}, a_{2,i+1}, \ldots, a_{2,i+1})\sigma_{1,i}, \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\rho,i} & = & (a_{\rho,i+1}, a_{\rho,i+1}, \ldots, a_{\rho,i+1})\sigma_{\rho,i}, \\ b_{1,i} & = & (b_{1,i+1}, a_{1,i+1}, \ldots, a_{1,i+1}), \\ b_{2,i} & = & (b_{2,i+1}, a_{2,i+1}, \ldots, a_{2,i+1}), \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\rho,i} & = & (b_{\rho,i+1}, a_{\rho,i+1}, \ldots, a_{\rho,i+1}), \end{array}\right. \tag{9}$$

gdzie $\sigma_{k,i} := \sigma_{a_{k,i},\epsilon}$ to etykietka automorfizmu $a_{k,i}$ na słowie pustym. W szczególności dla każdego $i \geq 1$ mamy: $A_i = \langle \sigma_{k,i}\colon 1 \leq k \leq \rho\rangle$ oraz $G(\mathcal{B}_i) = G_i = \langle S_{a,b,i}\rangle$, gdzie $\mathcal{B}_i$ jest i-tym przejściem automatu $\mathcal{B}$. Do wyprowadzenia powyższych własności stosowałem metody kombinatoryczne do słów grupowych $U \in F(S_{a,b,i})$ i ich sekcji. W tym celu wyróżniłem pojęcie (a,i)-sylaby, czyli dowolnego słowa $U \in F(S_{a,i})$ oraz pojęcie (b,i)-sylaby – słowa $U \in F(S_{b,i})$. Sylabę $U \in F(S_{a,i}) \cup F(S_{b,i})$ nazwałem trywialną, jeżeli jest słowem pustym ε lub definiuje element neutralny grupy G_i. W szczególności grupa $H_i = \langle S_{a,i}\rangle$ składa się z elementów zdefiniowanych przez (a,i)-sylaby, a grupa $K_i = \langle S_{b,i}\rangle$ – z elementów zdefiniowanych przez (b,i)-sylaby.

Lemat 3 ([H3], Lemma 5.2) *Dla każdego $i \geq 1$ zachodzą izomorfizmy $H_i \simeq K_i \simeq C_\infty^\rho$.*

Wniosek 4 ([H3], Corollary 5.3) *Sylaba $U \in F(S_{a,i})$ (odp. $U \in F(S_{b,i})$) jest trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $1 \leq k \leq \rho$ suma wykładników przy literze $a_{k,i}$ (odp. przy literze $b_{k,i}$) w tej sylabie jest równa 0.*

Dla dowolnego słowa grupowego $U \in F(S_{a,b,i})$ istnieje takie $n \geq 1$, że $U = W_1V_1 \ldots W_nV_n$, gdzie każde W_j jest (a,i)-sylabą, a każde V_j jest (b,i)-sylabą. Jeżeli wszystkie sylaby W_j, V_j $(1 \leq j \leq n)$ są nietrywialne (za wyjątkiem, być może, przypadku $W_1 = \varepsilon$ lub $V_n = \varepsilon$), to słowo U nazywałem zredukowanym. Sekcję $U_{\{w\}} \in F(S_{a,b,i+|w|})$ na słowie $w \in X^*_{(i)}$ zdefiniowałem poprzez rekursje (9) w sposób identyczny, jak to opisałem w rozdziale 2.2, pamiętając jednak dodatkowo, aby usuwać za każdym razem (przy tworzeniu kolejnych jednoliterowych sekcji) sylaby trywialne. W szczególności $U_{\{w\}}$ jest słowem zredukowanym. Dla zredukowanego słowa $U \in F(S_{a,b,i})$ oznaczyłem przez $L(U)$ ilość nietrywialnych (b,i)-sylab w tym słowie. Bezpośrednio z równości (9) dostałem: $L(U) \geq L(U_{\{w\}})$ dla dowolnego $w \in X^*_{(i)}$. Ponadto, jeżeli $L(U) = L(U_{\{w\}})$, to $U_{\{w\}} = U_{(i+|w|)}$ (stosuję tu oznaczenia z rozdziału 2.2, tzn. $U_{(i+|w|)}$ oznacza słowo powstałe z U przez zastąpienie każdej litery $a^\eta_{k,i}$ literą $a^\eta_{k,i+|w|}$ oraz każdej litery $b^\eta_{k,i}$ literą $b^\eta_{k,i+|w|}$, gdzie $\eta \in \{-1, 1\}$).

Lemat 4 ([H3], Lemma 5.5, Lemma 5.6) *Jeżeli $U \in F(S_{a,b,i})$ jest słowem zredukowanym oraz $L(U) > 1$, to istnieje takie $m \geq 1$, że $L(U) > L(U_{\{w\}})$ dla każdego $w \in X^m_{(i)}$; istnieje również takie słowo $w \in X^*_{(i)}$, że $L(U) = L(U_{\{w\}}) > L(U_{\{wx\}})$ dla każdego $x \in X_{i+|w|}$. W szczególności dla każdego $U \in F(S_{a,b,i})$ istnieje takie $M \geq 1$, że $L(U_{\{w\}}) \leq 1$ dla wszystkich $w \in X^M_{(i)}$.*

Indukcją po $L(U)$ i w oparciu o wniosek 4 oraz lemat 4 wyprowadziłem następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 10 ([H3], Proposition 5.7) *Jeżeli $U \in F(S_{a,b,i})$ definiuje element neutralny grupy G_i, to dla każdej litery ze zbioru $S_{a,b,i}$ suma wykładników przy tej literze w słowie U jest równa 0.*

Bezpośrednio ze stwierdzenia 10 i lematu 3 dostałem izomorfizm $G_i/G'_i \simeq C^{2\rho}_\infty$, z którego wynika równość $d(G_i) = 2\rho$. Dostałem także rozkład G_i na iloczyny półproste ([H3], Theorem 5.1 (i)). Np. do pokazania równości $G_i = H_i^{G_i} \rtimes K_i$ zauważyłem, że $G_i = \langle H_i \cup K_i \rangle$, a więc każdy element $g \in G_i$ jest postaci $g'g''$ dla pewnych $g' \in H_i^{G_i}$ i $g'' \in K_i$. Wystarczy więc pokazać, że grupy $H_i^{G_i}$ i K_i przecinają się trywialnie, ale to wynika ze stwierdzenia 10, jako że grupa $H_i^{G_i}$ jest generowana przez elementy postaci $k^{-1}hk$ dla $k \in K_i$, $h \in H_i$.

Dla pokazania, że G_i jest grupą beztorsyjną ([H3], Theorem 5.1 (iv)), rozważyłem dowolne słowo grupowe $U \in F(S_{a,b,i})$, które nie definiuje automorfizmu trywialnego. Niech $w = vx_0$ ($v \in X^*_{(i)}$, $x_0 \in X_{i+|v|}$) będzie najkrótszym słowem, dla którego $U(w) \neq w$. Oznaczmy $t := |v|$. Dla sekcji $U_{\{v\}} \in F(S_{a,b,i+t})$ mamy oczywiście: $U_{\{v\}} = W_1V_1 \ldots W_nV_n$, gdzie każde W_j jest $(a, i+t)$-sylabą, a każde V_j – $(b, i+t)$-sylabą. Ponieważ $U(v) = v$ oraz $U(w) \neq w$, to $U_{\{v\}}(x_0) \neq x_0$. Bezpośrednio z rekursji (9) zauważyłem, że dla wszystkich $1 \leq j \leq n$, $x \in X_{i+t}$ zachodzi $V_j(x) = x$. Zatem dla $(a, i+t)$-sylaby $W := W_1 \ldots W_n$ zachodzi: $W(x_0) = U_{\{v\}}(x_0) \neq x_0$. Zatem, wobec wniosku 4 powyżej, suma wykładników przy pewnej literze w sylabie W jest różna od zera. W konsekwencji suma wykładników przy tej literze w całym słowie $U_{\{v\}}$ jest różna od zera. Zatem dla dowolnego $m \geq 1$ w potędze $(U_{\{v\}})^m$ suma wykładników przy tej literze również jest różna od zera. Wobec równości $U(v) = v$ mamy ponadto: $(U^m)_{\{v\}} = \widehat{(U_{\{v\}})^m}$, tzn. sekcja $(U^m)_{\{v\}}$ powstaje z potęgi $(U_{\{v\}})^m$ przez usunięcie jedynie sylab trywialnych. Zatem dla każdego $m \geq 1$ suma wykładników przy pewnej literze w sekcji $(U^m)_{\{v\}}$ jest różna od zera, co wobec stwierdzenia 10 implikuje, że sekcja $(U^m)_{\{v\}}$, a w konsekwencji także słowo U^m, nie definiuje automorfizmu trywialnego.

Ze stwierdzenia 10 wynika również, że puste słowo grupowe jest jedynym zredukowanym słowem U, które definiuje element neutralny i jednocześnie spełnia nierówność $L(U) \leq 1$. Jako wniosek z lematu 4 oraz z obserwacji, że G_i jest beztorsyjna, otrzymałem następujący wniosek.

Wniosek 5 ([H3], Corollary 5.8) *Dowolne słowo grupowe $U \in F(S_{a,b,i})$ definiujące element neutralny grupy G_i jest słowem znikającym, tzn. istnieje takie $N \geq 0$, że $U_{\{w\}}$ jest słowem* *pustym dla każdego $w \in X_{(i)}^N$.*

Lemat 5 ([H3], Lemma 5.9) *Istnieją słowa grupowe $U \in F(S_{a,b,i})$ definiujące element neutralny i mające dowolnie dużą głębokość.*

Jako wniosek otrzymałem, że G_i nie ma skończonej prezentacji ([H3], Theorem 5.1 (vi)). Z kolei z następującego lematu wynika od razu, że G_i ma trywialne centrum [H3], Theorem 5.1 (v)).

Lemat 6 ([H3], Lemma 5.10) *Dla dowolnych $U \in F(S_{a,b,i})$, $W \in F(S_{a,i})$ i $V \in F(S_{b,i})$, jeżeli obydwa słowa grupowe $UWU^{-1}W^{-1}$ i $UVU^{-1}V^{-1}$ definiują element neutralny w G_i, to co najmniej jedno ze słów: U, W lub V definiuje element neutralny lub jest słowem pustym.*

Dla dowodu, że grupa G_i nie zawiera nieabelowych podgrup wolnych ([H3], Theorem 5.1 (vii)), można pokazać, że komutant G_i' jest grupą niemal finitarną i skorzystać ze stwierdzenia 4 ([H6], Proposition 1). Jednak w dowodzie przeprowadzonym w pracy [H3] skorzystałem z przytoczonej wcześniej alternatywy Nekrashevycha (twierdzenie 7) oraz z pewnej własności średniowalności składowych grafu Schreiera, opisujących działanie grup generowanych przez tzw. automorfizmy *prawie* finitarne ([61], Proposition 2.2).

Twierdzenie 18 (iii) w połączeniu z formułą na rangę splotu $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$ przynosi naturalną konstrukcję grup, która rozwiązuje następujący problem (zob. też [H3], str. 1266):

Problem 1 W jakim zakresie ranga $d(G)$ grupy G generowanej przez automat może odbiegać od rangi $d(\overline{G})$ jej domknięcia topologicznego (w grupie automorfizmów $Aut(X^*)$ odpowiedniego drzewa X^*)?

Rzeczywiście, dla automatu $\mathcal{B}$ z naszej konstrukcji mamy $d(G(\mathcal{B})) = 2\rho$ oraz $\overline{G(\mathcal{B})} = \wr_{i=1}^{\infty} A_i$. Jeżeli teraz zdefiniujemy grupy A_i następująco: $A_1 := C_{n_1}^n$, $A_i := C_{n_i}$ dla $i \geq 2$, przy czym $n > 1$, zaś $(n_i)_{i\geq 1}$ jest dowolnym ciągiem parami względnie pierwszych liczb naturalnych $n_i > 1$, to otrzymamy automat z poniższego twierdzenia.

Wniosek 6 *Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Wówczas istnieje zmienny alfabet $X = (X_i)_{i\geq 1}$ oraz taki automat A nad alfabetem X, że dla grupy $G := G(A) \leq Aut(X^*)$ generowanej przez ten automat zachodzi równość $d(G) - d(\overline{G}) = n$.*

Powyższe twierdzenie nawiązuje do wyniku G. A. Noskova ([64]), który rozpatrywał różnice $d(G) - d(\widehat{G})$ dla skończenie aproksymowalnych abstrakcyjnych grup G.

Twierdzenie 19 (Noskov) *Dla każdego $n \geq 1$ istnieje skończenie generowana, metabelowa grupa G, dla której $d(G) - d(\widehat{G}) \geq n$.*

Z drugiej strony, dla grup policyklicznych G mamy następujący wynik, pochodzący od P. A. Linnel'a i D. Warhursta ([52]):

Twierdzenie 20 (Linnel, Warhurst) *$d(G) - d(\widehat{G}) \leq 1$ dla każdej policyklicznej grupy G.*

Powyższe dwa rezultaty sugerują, aby próbować badać grupę $G(\mathcal{B})$ w kierunku charakteryzacji jej podgrup normalnych skończonego indeksu, co pozwoliłoby dokładniej porównać $\overline{G(\mathcal{B})}$ z $\widehat{G(\mathcal{B})}$. Oczywiście mamy $d(\overline{G(\mathcal{B})}) \leq d(\widehat{G(\mathcal{B})})$, jako że $\overline{G(\mathcal{B})}$ jest obrazem homomorficznym $\widehat{G(\mathcal{B})}$. W szczególności pojawia się pytanie, czy $G(\mathcal{B})$ ma własność kongruencji podgrup. W przypadku pozytywnej odpowiedzi, mielibyśmy izomorfizm $\overline{G(\mathcal{B})} \simeq \widehat{G(\mathcal{B})}$.

2.6 Średniowalność – praca [H8]

W 2016 roku K. Juschenko, V. Nekrashevych i M. de la Salle ([45]) sformułowali nowy warunek na średniowalność dla szerokiej klasy grup działających na przestrzeni topologicznej przez homeomorfizmy. Jako jedno z zastosowań otrzymali następujące kryterium na średniowalność grup automorfizmów ograniczonych.

Twierdzenie 21 (Juschenko, Nekrashevych, de la Salle, [45]) *Niech $X = (X_i)_{i\geq 1}$ będzie dowolnym zmiennym alfabetem. Jeżeli $G \leq Aut(X^*)$ jest grupą automorfizmów ograniczonych, dla której wszystkie grupy izotropii G_u ($u \in X^\omega$) są średniowalne, to G również jest średniowalna.*

Grupę izotropii G_u ($u \in X^\omega$) w powyższym twierdzeniu zdefiniowano jako grupę ilorazową $Stab_G(u)/N_{G,u}$, gdzie $N_{G,u}$ składa się z automorfizmów $g \in Stab_G(u)$, które działają trywialnie na pewnym sąsiedztwie słowa u (czyli na zbiorze postaci $wX^*_{(|w|+1)}$ dla pewnego prefiksu $w \prec u$).

W pracy [45] pokazano również, że powyższe kryterium implikuje średniowalność wielu znanych i badanych wcześniej grup generowanych przez automorfizmy ukorzenione i skierowane, wliczając w to konstrukcje J. Brieussella ([20]) gęstych podgrup w splotach grup alternujących, a także, opisane w rozdziale 2.4, konstrukcje gęstych podgrup w splotach grup abelowych (w tym przypadek badany przez E. Fink). Z kolei konstrukcja D. Segala ([70]) gęstej podgrupy w splocie $\wr_{i=1}^{\infty} PSL_2(p_i)$ daje grupę, która nie jest średniowalna.

Powstaje pytanie, czy można twierdzenie 21 wykorzystać do sformułowania jakiegoś kryterium na średniowalność dla grup generowanych przez automorfizmy jednorodne i ich pęknięcia. Kryterium takie uzyskałem w pracy [H8]. W tym celu wprowadziłem następujące pojęcie singularności.

Definicja 19 Dla grupy $G \leq Aut(X^*)$ i słowa $u \in X^\omega$ powiemy, że u jest G-singularne, jeżeli dla każdego $g \in G$ i każdego prefiksu $w \prec u$, dla którego sekcja $g_{\{w\}}$ jest nietrywialna, odpowiedni sufiks słowa u nie jest punktem stałym tej sekcji (tzn., jeżeli $u = wv$ i $g_{\{w\}} \neq id_{X^*_{(|w|+1)}}$, to $g_{\{w\}}(v) \neq v$).

Głównym wynikiem pracy [H8] jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 22 ([H8], Theorem 2.6) *Niech $\Gamma \leq Aut(X^*)$ będzie dowolną grupą automorfizmów jednorodnych i niech $\widetilde{\Gamma}$ będzie zbiorem pęknięć automorfizmów $g \in \Gamma$ wzdłuż jednej wspólnej ścieżki $u \in X^\omega$. Jeżeli słowo u jest Γ-singularne, to grupa $G := \langle \Gamma \cup \widetilde{\Gamma} \rangle$ jest średniowalna wtedy i tylko wtedy, gdy Γ jest średniowalna.*

Do dowodu powyższego twierdzenia wykorzystałem pojęcie grupy niemal finitarnej (wprowadzone w pracy [H6]), dostając następujący wynik:

Stwierdzenie 11 ([H8], Proposition 3.4) *Jeżeli $G \leq Aut(X^*)$ jest grupą niemal finitarną, to wszystkie grupy izotropii G_u ($u \in X^\omega$) są trywialne.*

Zatem jako bezpośredni wniosek z powyższego stwierdzenia i twierdzenia 21 otrzymałem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 23 ([H8], Theorem 3.5) *Jeżeli $G \leq Aut(X^*)$ jest grupą niemal finitarną, to G jest średniowalna.*

Podane w twierdzeniu 22 kryterium w jedną stronę wynika bezpośrednio z własności, że klasa grup średniowalnych jest zamknięta na branie podgrup. Dla dowodu w drugą stronę kluczowa była konstrukcja niemal finitarnej podgrupy normalnej $K \triangleleft G$ o tej własności, że grupa ilorazowa G/K jest homomorficznym obrazem grupy Γ oraz skorzystanie z własności, że klasa grup średniowalnych jest zamknięta na branie rozszerzeń i obrazów homomorficznych. Przypuszczam, że twierdzenie 22 obowiązuje także bez założenia singularności słowa u; jednak bez tego założenia nie udało mi się przeprowadzić dowodu, że skonstruowana grupa K jest niemal finitarna.

Uzyskane kryterium zastosowałem do skonstruowanej w poprzednim rozdziale grupy

$$\mathcal{G} := G_1 = \langle S_{a,b,1} \rangle,$$

otrzymując następujące twierdzenie (stosując identyczne rozumowanie jak w dowodzie poniższego twierdzenia, od razu dostajemy średniowalność wszystkich grup $G_i = \langle S_{a,b,i} \rangle$, $i \geq 1$):

Twierdzenie 24 ([H8], Theorem 2.7) *Grupa $\mathcal{G}$ jest średniowalna.*

Twierdzenie 23 można zastosować do prawie minimalnej automatowej realizacji z pracy [H6], uzyskując następujący wynik:

Wniosek 7 *Dla dowolnego splotu $\wr_{i=1}^{\infty} H_i$ nieabelowych prostych przechodnich grup permutacji (H_i, X_i) skończonych zbiorów X_i istnieje prawie minimalna realizacja automatowa za pomocą 3-stanowego ograniczonego automatu $\mathcal{A}$ nad alfabetem $X = (X_i)_{i \geq 1}$. Grupa $G(\mathcal{A})$ generowana przez automat $\mathcal{A}$ jest średniowalną grupą wzrostu wykładniczego, nie posiadającą skończonej prezentacji, a jej obydwa generatory (odpowiadające nietrywialnym stanom automatu $\mathcal{A}$) generują półgrupę wolną. Ponadto grupa te jest niemal finitarna, samo-replikująca i słabo rozgałęziona.*

Uwaga 5 Przypuszczam, że system rekursji splotowych (7) automatu $\mathcal{A}$ z powyższego wniosku definiuje dla każdego $i \geq 1$ izomorfizm grupy $G(\mathcal{A}_i)$ ze splotem $G(\mathcal{A}_{i+1}) \wr_{X_i} H_i$. Wówczas, posługując się ostatnimi wynikami K. Juschenko ([43]), dostałbym grupę $G(\mathcal{A})$, która nie jest elementarnie podwykładniczo średniowalna (elementary subexponentially amenable). Co więcej, różnym ciągom $(H_i, X_i)_{i \geq 1}$ odpowiadają prawdopodobnie nieizomorficzne grupy automatowe. W rezultacie dostałbym continuum wiele takich grup. Pierwszy znany przykład grupy średniowalnej, która nie jest elementarnie podwykładniczo średniowalna, to wspomniana wcześniej grupa bazyliki skonstruowana w 2002 roku przez Grigorchuka i Żuka ([38]) (choć dowód tego, że grupa ta jest w ogóle średniowalna, podali dopiero w 2005 roku L. Bartholdi, B. Virág – [9]). Grupa ta jest generowana przez 3-stanowy automat Mealy'ego $A = (\{a, b, id\}, \{0, 1\}, \mathcal{R})$ z następującym układem rekursji splotowych:

$$\mathcal{R} \colon \begin{cases} a &= (id, b), \\ b &= (id, a)(0, 1), \\ id &= (id, id). \end{cases}$$

2.7 Charakteryzacja automatowa splotów – praca [H7]

Niech $X = (X_i)_{i \geq 1}$ będzie dowolnym zmiennym alfabetem. W 2010 roku Bondarenko ([15]) zauważył, że przy dosyć ogólnych warunkach na ciąg $(G_i, X_i)_{i \geq 1}$ przechodnich grup permutacji istnieje skończony zbiór automorfizmów ukorzenionych i skierowanych drzewa X^*, który generuje topologicznie splot $W_\infty := \wr_{i=1}^{\infty} G_i$, otrzymując w ten sposób kryterium ([15], Theorem 1.1) kiedy taki splot jest topologicznie skończenie generowany. Choć pełną charakteryzację topologicznej skończonej generowalności splotów $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ podali dopiero E. Detomi i A. Lucchini w 2013 roku (twierdzenie 4), to analizując dowód kryterium Bondarenki, można otrzymać pewien wgląd w samą konstrukcję odpowiedniego zbioru topologicznych generatorów. Konstrukcja ta podsunęła mi pomysł, który w rezultacie doprowadził do następującej, kompletnej charakteryzacji ciągów $(G_i, X_i)_{i\geq 1}$, dla których splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest generowany przez automat nad alfabetem $X = (X_i)_{i\geq 1}$, a w przypadku, gdy alfabet $X = (X_i)_{i\geq 1}$ jest stały – przez automat Mealy'ego nad alfabetem X.

Twierdzenie 25 ([H7], Theorem 1) *Niech $(G_i, X_i)_{i\geq 1}$ będzie ciągiem przechodnich grup permutacji.*

(i) Splot $W_\infty = \wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest generowany przez automat nad alfabetem $X = (X_i)_{i\geq 1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

(a) ciąg $(d(G_i))_{i\geq 1}$ jest ograniczony,

(b) $d(\prod_{i\geq 1} G_i/G_i') < \infty$.

(ii) Jeżeli alfabet $X = (X_i)_{i\geq 1}$ jest stały, to splot W_∞ jest generowany przez automat Mealy'ego nad alfabetem X wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

(a') ciąg $(G_i)_{i\geq 1}$ jest zstępujący, tzn. $G_1 \geq G_2 \geq \ldots$,

(b') najmniejsza grupa w tym ciągu jest doskonała.

Jeżeli alfabet $X = (X_i)_{i\geq 1}$ jest ograniczony, to obydwa ciągi $(d(G_i))_{i\geq 1}$ i $(d(G_i)/N_{i-1})_{i\geq 2}$ są ograniczone (oznaczenia jak w twierdzeniu 4). Jako wniosek otrzymałem:

Wniosek 8 ([H7], Corollary 1) *Niech $(G_i, X_i)_{i\geq 1}$ będzie ciągiem przechodnich grup permutacji. Jeżeli alfabet $X = (X_i)_{i\geq 1}$ jest ograniczony lub ciąg $(d(G_i))_{i\geq 1}$ jest ograniczony, to następujące stwierdzenia są równoważne*

(i) splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest generowany przez automat nad alfabetem X,

(ii) splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest topologicznie skończenie generowany.

Jeżeli alfabet X jest stały, to następujące stwierdzenia są równoważne:

(iii) splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest generowany przez automat Mealy'ego nad alfabetem X,

(iv) splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest topologicznie skończenie generowany oraz ciąg $(G_i)_{i\geq 1}$ jest zstępujący.

Z drugiej strony można tak dobrać alfabet $X = (X_i)_{i\geq 1}$ oraz ciąg $(G_i, X_i)_{\geq 1}$ przechodnich grup doskonałych, że ciąg $(d(G_i)/N_{i-1})_{i\geq 2}$ jest ograniczony, ale ciąg $(d(G_i))_{i\geq 1}$ jest nieograniczony ([15], Example 3.5). W rezultacie otrzymałem:

Wniosek 9 ([H7], Corollary 2) *Istnieje ciąg $(G_i, X_i)_{i\geq 1}$ przechodnich grup permutacji skończonych zbiorów X_i, dla którego splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest topologicznie skończenie generowany, ale nie istnieje automat, który generuje ten splot.*

Dla dowodu pierwszej części twierdzenia 25 wprowadziłem pojęcie bazy generującej dla dowolnego nieskończonego ciągu $(G_i)_{i\geq 1}$ grup skończonych.

Definicja 20 Bazą generującą (stopnia m) ciągu $(G_i)_{i\geq 1}$ grup skończonych nazywamy ciąg $\Gamma = (\Gamma_i)_{i\geq 1}$, gdzie Γ_i $(i \geq 1)$ jest uporządkowaną m-ką $(g_{1i}, \ldots, g_{mi})$ elementów grupy G_i, spełniającą następujące warunki (poniżej dla dowolnej grupy G i dowolnego $g \in G$ oznaczamy przez $\overline{g}$ obraz elementu g przy homomorfizmie kanonicznym $G \to G/G'$, tzn. $\overline{g} := gG'$):

- $G_i = \langle g_{1i}, \ldots, g_{mi} \rangle$ dla każdego $i \geq 1$ oraz
- istnieje takie $1 \leq k \leq m$, że $G_i/G_i' = \langle \overline{g_{1i}}, \ldots, \overline{g_{ki}} \rangle$ dla każdego $i \geq 1$ oraz
- $NWD(o(\overline{g_{ji}}), o(\overline{g_{ji'}})) = 1$ dla dowolnych $1 \leq j \leq k$ oraz $i \neq i'$.

Stwierdzenie 12 ([H7], Proposition 3) *Ciąg $(G_i)_{i\geq 1}$ grup skończonych ma bazę generującą wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (a)–(b) twierdzenia 25. Co więcej, jeżeli te warunki są spełnione, to ciąg $(G_i)_{i\geq 1}$ ma bazę generującą stopnia $m := d_1 + d_2$, gdzie $d_1 := d(\prod_{i\geq 1} G_i/G_i')$, $d_2 := \max_{i\geq 1}(d(G_i))$.*

Stwierdzenie 13 ([H7], Proposition 4) *Niech $(G_i, X_i)_{i\geq 1}$ będzie ciągiem przechodnich grup permutacji spełniającym warunki (a)–(b) twierdzenia 25. Niech $((g_{1i}, \ldots, g_{mi}))_{i\geq 1}$ będzie dowolną bazą generującą tego ciągu. Załóżmy dodatkowo, że dla każdego $i \geq 1$ działanie komutanta G_i' na zbiorze X_i ma następującą własność: istnieją dwie różne litery $x_i, x_i' \in X_i$, które są w tej samej orbicie, ale mają różne stabilizatory. Dla każdego $1 \leq j \leq m$ zdefiniujmy dwa automorfizmy $R_j, D_j \in \wr_{i=1}^{\infty} G_i$ poprzez ich etykietki $\sigma_{R_j,w}$, $\sigma_{D_j,w}$ $(w \in X^*)$, w następujący sposób:*

$$\sigma_{R_j,w} := \begin{cases} g_{j1}, & w = \epsilon, \\ id_{X_{|w|+1}}, & w \neq \epsilon, \end{cases} \qquad \sigma_{D_j,w} := \begin{cases} g_{j(i+1)}, & w = x_1 \ldots x_{i-1}x_i',\ i \geq 1, \\ id_{X_{|w|+1}}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas zbiór $\{R_1, \ldots, R_m, D_1, \ldots, D_m\}$ generuje topologicznie splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$.

W szczególności widzimy, że każdy automorfizm R_j z powyższego stwierdzenia jest ukorzeniony, a każdy automorfizm D_j – 1-skierowany o kierunku $x_1x_2x_3 \ldots \in X^\omega$. W oparciu o tę konstrukcję, można zdefiniować *automat standardowy*, który generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$. Automat taki będzie miał $3m$ stanów, przy czym m stanów będzie definiować automorfizmy R_j, a pozostałe $2m$ stanów – automorfizmy D_j. Niestety, automat taki nie będzie uniwersalny, tzn. będzie generować splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ pod warunkiem, że ciąg $(G_i, X_i)_{i\geq 1}$ spełnia (oprócz koniecznych warunków (a)–(b)) opisany wyżej warunek na działanie komutantów G_i'. W celu uzyskania uniwersalnej konstrukcji, wprowadziłem pewną modyfikację automatu standardowego, otrzymując automat z poniższego twierdzenia.

Stwierdzenie 14 ([H7], Proposition 10) *Niech $(G_i, X_i)_{i\geq 1}$ będzie ciągiem przechodnich grup permutacji, spełniającym warunki (a)–(b) twierdzenia 25. Niech $((g_{1i}, \ldots, g_{mi}))_{i\geq 1}$ będzie dowolną bazą generującą tego ciągu. Dla każdego $i \geq 1$ wybierzmy dwie litery $x_i, x_i' \in X_i$ i zdefiniujmy automat $\mathcal{A} = (S, X, \varphi, \psi)$ w następujący sposób:*

- *$S = \{e\} \cup \bigcup_{j=1}^{m} \{r_{j0}, r_{j1}, r_{j2}, r_{j3}\} \cup \bigcup_{j=1}^{m} \{d_{j1}, d_{j2}, d_{j3}\}$,*
- *ciąg $\varphi = (\varphi_i)_{i\geq 1}$ funkcji przejść $\varphi_i \colon S \times X_i \to S$ jest określony następująco: $\varphi_i(e, x) = \varphi_i(r_{j0}, x) = e$ oraz*

$$\varphi_i(r_{j(s+1)}, x) = \begin{cases} r_{js}, & x = x_i', \\ e, & x \neq x_i', \end{cases}$$

$$\varphi_i(d_{j(s+1)}, x) = \begin{cases} d_{j(s+1)}, & x = x_i, \\ r_{j(s+1)}, & x = x_i',\ i \equiv -1 \pmod 3, \\ e, & \textit{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

- *ciąg $\psi = (\psi_i)_{i\geq 1}$ funkcji wyjść $\psi_i\colon S \times X_i \to X_i$ jest określony następująco:*

$$\psi_i(r_{j0}, x) = g_{ji}(x), \quad \psi_i(e, x) = \psi_i(d_{j(s+1)}, x) = \psi_i(r_{j(s+1)}, x) = x$$

dla wszystkich $i \geq 1$, $x \in X_i$, $1 \leq j \leq m$, $s \in \{0, 1, 2\}$. Wówczas automat $\mathcal{A}$ generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$.

Grupa $G(\mathcal{A})$ generowana przez zdefiniowany wyżej automat $\mathcal{A}$ jest podgrupą w splocie $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$, gdyż dla każdego $i \geq 1$ grupa wierzchołkowa $V_{\mathcal{A},i} \leq Sym(X_i)$ (tzn. grupa generowana przez etykietki $\sigma_{s,i}\colon x \mapsto \psi_i(s, x)$ dla $s \in S$) pokrywa się z G_i. Chcąc otrzymać przejrzysty opis działania generatorów $\widetilde{s} \in G(\mathcal{A})$ $(s \in S)$ na drzewie X^* i w rezultacie pokazać, że automat $\mathcal{A}$ generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$, wprowadziłem pojęcie ξ-partycji A_ξ dla dowolnego automatu $A = (S, X, \varphi, \psi)$ i dowolnego ściśle rosnącego ciągu $\xi = (t_i)_{i\geq 0}$ liczb całkowitych z warunkiem $t_0 := 0$. Automat A_ξ zdefiniowałem jako automat

$$A_\xi := (S, X_\xi, \varphi_\xi, \psi_\xi),$$

w którym zmienny alfabet X_ξ jest ξ-partycją alfabetu X, tzn.

$$X_\xi := (Y_i)_{i\geq 1}, \quad Y_i := \prod_{r=t_{i-1}+1}^{t_i} X_r, \quad i \geq 1,$$

a funkcje przejść $\varphi_{\xi,i}\colon S \times Y_i \to S$ i wyjść $\psi_{\xi,i}\colon S \times Y_i \to Y_i$ są zdefiniowane w taki sposób, że w dowolnej chwili $i \geq 1$ automat A_ξ, będąc w dowolnym stanie $s \in S$ i pobierając na wejściu dowolną literę $y \in Y_i$ (litera y jest oczywiście słowem nad alfabetem $(X_j)_{j>t_{i-1}}$), imituje zachowanie automatu A, który znajdując się w chwili $t_{i-1} + 1$ w stanie s, odczytuje na wejściu słowo y. Dla dowodu stwierdzenia 14 wykorzystałem następujący lemat:

Lemat 7 ([H7], Lemma 1) *Jeżeli dla każdego $i \geq 1$ zachodzi równość $V_{A_\xi,i} = \wr_{r=t_{i-1}+1}^{t_i} V_{A,r}$, a ponadto automat A_ξ generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} V_{A_\xi,i}$, to automat A generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} V_{A,i}$.*

Rozważałem następnie ξ-partycję $\mathcal{A}_\xi = (S, X_\xi, \varphi_\xi, \psi_\xi)$ automatu $\mathcal{A}$, gdzie $\xi = (3i)_{i\geq 0}$ i wyprowadziłem opis funkcji przejść i wyjść w automacie $\mathcal{A}_\xi$ ([H7], Proposition 9). Na podstawie tego opisu udowodniłem, że 3-iterowany splot $H_i := \wr_{r=3i-2}^{3i} G_r$ $(i \geq 1)$ jest grupą wierzchołkową $V_{\mathcal{A}_\xi,i}$ automatu $\mathcal{A}_\xi$, a ponadto spełniony jest warunek ze stwierdzenia 13, dotyczący działania komutantów H_i' na zbiorach $Y_i := X_{3i-2} \times X_{3i-1} \times X_{3i}$. Skonstruowałem także bazę generującą $(\hat{h}_{1,i}, \ldots, \hat{h}_{3m,i})_{i\geq 1}$ stopnia $3m$ ciągu $(H_i)_{i\geq 1}$. Dowodziłem następnie, że automorfizmy zdefiniowane przez stany r_{js} i $d_{j(s+1)}$ $(1 \leq j \leq m,\ s = 0, 1, 2)$ automatu $\mathcal{A}_\xi$ to automorfizmy, odpowiednio, ukorzenione i 1-skierowane drzewa X_ξ^* i można je opisać, w oparciu o bazę $(\hat{h}_{1,i}, \ldots, \hat{h}_{3m,i})_{i\geq 1}$, identycznie jak automorfizmy R_j, D_j w stwierdzeniu 13 (w oparciu o zadaną tam bazę). Zatem automat $\mathcal{A}_\xi$ generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} V_{\mathcal{A}_\xi,i} = \wr_{i=1}^{\infty} H_i$ i wobec lematu 7 otrzymałem, że automat $\mathcal{A}$ generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$.

Ponieważ do wygenerowania splotu $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ potrzebujemy jedynie $6m$ stanów automatu $\mathcal{A}$, dostałem również następujące oszacowanie: $d(\wr_{i=1}^{\infty} G_i) \leq 6m$. Powyższa konstrukcja dostarcza zatem następującego ograniczenia górnego na rangę splotu $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ i na liczbę stanów w automacie optymalnym dla takiego splotu:

Wniosek 10 ([H7], Corollary 3) *Niech $(G_i, X_i)_{i\geq 1}$ będzie dowolnym ciągiem przechodnich grup permutacji. Oznaczmy $m := d_1 + d_2$, gdzie $d_1 := d(\prod_{i\geq 1} G_i/G_i')$ i $d_2 := \sup_{i\geq 1}(d(G_i))$. Wtedy $d(\wr_{i=1}^{\infty} G_i) \leq 6m$, a liczba stanów w automacie optymalnym dla splotu $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest nie większa niż $7m + 1$.*

W drugą stronę twierdzenie 25 (i) wynika stąd, że jeżeli splot $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest generowany przez jakiś automat $A = (S, X, \varphi, \psi)$, to splot ten, a w konsekwencji także iloczyn $\prod_{i\geq 1} G_i/G_i'$ (jako jego obraz homomorficzny), muszą być topologicznie skończenie generowane. Ponadto dla każdego $i \geq 1$ grupa G_i jest generowana przez etykietki $\sigma_{\widetilde{s},w} \in Sym(X_i)$ dla $s \in S$ i $w \in X^{i-1}$. Ale etykietka $\sigma_{\widetilde{s},w}$ ($s \in S$, $w \in X^{i-1}$) jest obcięciem sekcji $\widetilde{s}_{\{w\}}$ do zbioru słów jednoliterowych, a z kolei sekcja ta jest przekształceniem definiowanym przez pewien stan automatu $A_i = (S, (X_j)_{j\geq i}, (\varphi_j)_{j\geq i}, (\psi_j)_{j\geq i})$. Zatem $d(G_i) \leq |S|$ dla każdego $i \geq 1$.

Dla dowodu twierdzenia 25 (ii) rozważyłem dowolną przechodnią grupę doskonałą (G, X) skończonego zbioru X i w oparciu o jej dowolny m-elementowy zbiór generatorów, skonstruowałem pewien $(7m + 1)$-stanowy automat Mealy'ego $\mathcal{B}$ nad alfabetem X. Dowodziłem następnie, że automat $\mathcal{B}$ generuje potęgę splotową $P_\infty := \wr_{i=1}^{\infty} G^{(i)}$ grupy G ([H7], Proposition 12). W tym celu badałem automorfizmy definiowane przez stany automatu $\mathcal{B}_\xi$, gdzie $\xi := (2i)_{i\geq 0}$ ([H7], Proposition 11). Mając wreszcie dowolny ciąg $(G_i, X)_{i\geq 1}$ przechodnich grup permutacji, spełniający warunki (a')–(b') Twierdzenia 25, zastosowałem konstrukcję automatu $\mathcal{B}$ wraz z poniższym lematem, aby pokazać, że splot $W_\infty = \wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest generowany przez pewien automat Mealy'ego nad alfabetem X.

Lemat 8 ([H7], Lemma 2) *Jeżeli $A = (S, X, \varphi, \psi)$ jest automatem Mealy'ego nad alfabetem X oraz (G, X) jest przechodnią grupą permutacji, zawierającą wszystkie etykietki $\sigma_s \in Sym(X)$ ($s \in S$), to splot $\overline{G(A)} \wr_X G$ jest generowany przez automat Mealy'ego nad alfabetem X. W szczególności grupa $\overline{G(A)} \wr_X G$ jest generowana przez pewien automat Mealy'ego nad alfabetem X.*

W drugą stronę, jeżeli splot $W_\infty = \wr_{i=1}^{\infty} G_i$ jest generowany przez pewien automat Mealy'ego $A = (S, X, \varphi, \psi)$, to grupa G_i ($i \geq 1$) jest generowana przez zbiór

$$\mathcal{S}_i := \{\sigma_{\widetilde{s},w} \colon s \in S, w \in X^{i-1}\}.$$

Ale dla dowolnych $i \geq 2$, $w \in X^{i-1}$ mamy: $w = xv$ dla pewnych $v \in X^{i-2}$, $x \in X$, a zatem dla każdego $s \in S$ mamy: $\sigma_{\widetilde{s},w} = \sigma_{\widetilde{q},v}$, gdzie $q := \varphi(s, x) \in S$, a stąd $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{S}_{i-1}$. Czyli ciąg $(G_i)_{i\geq 1}$ jest zstępujący. Najmniejsza grupa w tym ciągu (oznaczmy ją przez G_{i_0}) musi być doskonała, bo inaczej abelianizacja $K := G_{i_0}/G'_{i_0}$ byłaby nietrywialną grupa abelową i nieskończona potęga prosta $K^{\mathbb{N}}$ byłaby homomorficznym obrazem splotu W_∞, a więc splot ten nie byłby topologicznie skończenie generowany.

3 Omówienie pozostałego dorobku naukowego

3.1 Wybrane wyniki uzyskane po doktoracie – prace [P1]–[P7]

Na pozostały dorobek naukowy, zrealizowany po uzyskaniu stopnia doktora, składają się m.in. następujące prace:

[P1] A. Woryna, *The generalized dihedral groups $Dih(C_\infty^n)$ as groups generated by time-varying automata*, Algebra and Discrete Mathematics, 3 (2008), 98–111,

[P2] A. Woryna, *The group of balanced automorphisms of a spherically homogeneous rooted tree*, Annales Mathematicae Silesianae, 23 (2009), 83–101,

[P3] A. Woryna, *The concept of duality for automata over a changing alphabet and generation of a free group by such automata*, Theoretical Computer Science, 412 (45) (2011), 6420–6431; IF 0.665,

[P4] A. Woryna, *Automaton ranks of some self-similar groups*, Lecture Notes in Computer Science, 7183 (2012), 514–525,

[P5] A. Woryna, *The concept of self-similar automata over a changing alphabet and lamplighter groups generated by such automata*, Theoretical Computer Science, 482 (2013), 96–110; IF 0.516,

[P6] A. Woryna, *The classification of abelian groups generated by time-varying automata and by Mealy automata over the binary alphabet*, Information and Computation, 249 (2016), 18–27; IF 1.050,

[P7] A. Woryna, *On groups generated by bi-reversible automata: the two-state case over a changing alphabet*, Journal of Computer and System Sciences, 86 (2017), 181–190; IF 1.678.

W pracy **[P2]** rozważałem grupę $Aut_c(X^*) \leq Aut(X^*)$ automorfizmów cyklicznych, a w niej podgrupę $J_c(X^*) \leq Aut_c(X^*)$ automorfizmów jednorodnych. Elementami grupy $Aut_c(X^*)$ są takie automorfizmy $g \in Aut(X^*)$, że każda etykietka $\sigma_{g,w}$ ($w \in X^*$) jest potęgą pewnego ustalonego (dla całej grupy $Aut_c(X^*)$) długiego cyklu odpowiedniego zbioru liter. Wprowadziłem następnie modyfikację każdego automorfizmu $g \in J_c(X^*)$, zastępując jego etykietki na słowach kończących się literą nieparzystą (po uprzednim podziale zbiorów liter na litery parzyste i nieparzyste) permutacjami odwrotnymi. Powstały automorfizm cykliczny (który oczywiście już nie jest jednorodny) nazwałem automorfizmem zbalansowanym drzewa X^*. Pokazałem, że zbiór $\mathcal{B} \subseteq Aut_c(X^*)$ wszystkich automorfizmów zbalansowanych tworzy grupę wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i \geq 1$ zachodzi implikacja $2 \nmid n_i \Rightarrow n_{i+1} = 2$, gdzie $n_i := |X_i|$. W zależności od ciągu $(n_i)_{i\geq 1}$, wyprowadziłem szereg algebraicznych własności grupy $\mathcal{B}$, uzyskując konkretną realizację nieprzeliczalnie wielu, parami nieizomorficznych, nieprzeliczalnych grup metabelowych, spełniających tożsamość $x^2y^2 = y^2x^2$. Na przykład, dla ciągu $(2, n_2, 2, n_4, 2, n_5, \ldots)$ grupa $\mathcal{B}$ jest izomorficzna z iloczynem kartezjańskim $\prod_{i\geq 1} D_{2n_{2i}}$ skończonych grup diedralnych. W ogólności grupa $\mathcal{B}$ jest aproksymowalnie nilpotentna wtedy i tylko wtedy, gdy n_i jest potęgą dwójki dla każdego $i \geq 1$. Ponadto można tę grupę rozłożyć na iloczyn $\mathcal{K}_0\mathcal{K}_1$ pewnych jej dwóch abelowych podgrup przecinających się trywialnie (mimo to $\mathcal{B}$ nie jest z reguły iloczynem półprostym grup abelowych).

W pracach **[P1], [P3], [P5]** znajdowałem i badałem realizacje automatowe dla pewnych ważnych i popularnych w algebrze grup. W pracy **[P1]** były to uogólnione grupy diedralne $Dih(C_\infty^n)$ $(n \geq 1)$, czyli iloczyny półproste $C_\infty^n \rtimes_\phi C_2$, gdzie $\phi(0)$ oznacza identyczność, a $\phi(1)$ jest braniem elementu przeciwnego. Interpretując potęgę C_∞^n jako kratę całkowitą w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, można rozważać grupę $Dih(C_\infty^n)$ jako dyskretną podgrupę grupy izometrii przestrzenie $\mathbb{R}^n$ generowaną przez wszystkie przesunięcia i odbicia względem punktów tej kraty. Grupy tej postaci stanowią ważne przykłady tzw. grup krystalograficznych. W pracy **[P1]** zaproponowałem nową interpretację grupy $Dih(C_\infty^n)$, jako grupy $G(A)$ generowanej przez automat A z $(2n+2)$-elementowym zbiorem stanów $S = \{a_1, b_1, \ldots, a_{n+1}, b_{n+1}\}$ o tej własności, że $\widetilde{a_k}$ i $\widetilde{b_k}$ $(1 \leq k \leq n+1)$ są wzajemnie odwrotnymi automorfizmami zbalansowanymi rzędu 2. W szczególności $G(A) = \langle \widetilde{a_1}, \ldots, \widetilde{a_{n+1}} \rangle$. Wyprowadziłem formułę na minimalną długość $||g||$ dowolnego elementu $g \in G(A)$ (rozpatrywanego jako słowo półgrupowe z liter $\widetilde{a_k}$, $1 \leq k \leq n+1$), otrzymując przejrzyste algorytmy rozwiązujące problem słowa i problem sprzężoności w $G(A)$. Badając działanie grupy $G(A)$ na drzewie X^*, scharakteryzowałem orbity tego działania oraz stabilizatory. Otrzymałem w szczególności $Stab_{G(A)}(m) = Stab_{G(A)}(w) \simeq C_\infty^n$ oraz $Stab_{G(A)}(u) = \{id_{X^*}\}$ dla dowolnych $m > 0$, $w \in X^m$, $u \in X^\omega$.

W pracy **[P5]** skonstruowałem uniwersalną realizację automatową dla uogólnionej grupy migających żarówek $KwrC_\infty := \bigoplus_{C_\infty} K \rtimes C_\infty$, gdzie K jest dowolną skończenie generowaną grupą abelową (aby grupa $GwrC_\infty$ była skończenie aproksymowalna, to G musi być abelowa – [39]). Dla dowolnej skończenie generowanej grupy abelowej K łatwo jest jawnie skonstruować automat A (automat nad zmiennym alfabetem), dla którego $G(A) \simeq K$. Nadaje się do tego chociażby automat diagonalny, tzn. automat $A = (S, X, \varphi, \psi)$, w którym $\varphi_i(s, x) = s$ dla wszystkich $i \geq 1$, $x \in X_i$ i $s \in S$. Przy okazji od razu dostałem automat minimalny dla K (tzn. automat, w którym liczba stanów jest równa $d(K)$). Głównym wynikiem pracy **[P5]** była obserwacja, że prosta modyfikacja funkcji przejść w pewnym minimalnym automacie diagonalnym generującym iloczyn kartezjański $K \times C_\infty$, prowadzi do realizacji automatowej grupy $KwrC_\infty$. Modyfikacja i-tej $(i \geq 1)$ funkcji przejść polega na przejściu z dowolnego stanu do pewnego jednego, wyróżnionego stanu (wspólnego dla wszystkich i), za każdym razem, gdy na wejściu pojawi się pewna ustalona litera alfabetu X_i (zależna od aktualnego stanu). Modyfikacja ta jest uniwersalna, gdyż pracuje dla dowolnej skończenie generowanej (skończonej lub nieskończonej) grupy abelowej K. Ponieważ $d(KwrC_\infty) = d(K \times C_\infty) = d(K) + 1$, to uzyskałem w szczególności pewien minimalny automat $A = (S, X, \varphi, \psi)$ dla grupy $KwrC_\infty$. Udodowdniłem też, że jest to automat samopodobny, tzn. dla każdego $i \geq 1$ odwzorowanie $\widetilde{s} \mapsto s_i$ dla $s \in S$ indukuje izomorfizm $G(A) \simeq G(A_i)$, gdzie $A_i = (S, (X_j)_{j \geq i}, (\varphi_j)_{j \geq i}, (\psi_j)_{j \geq i})$ jest i-tym przejściem automatu A.

Obecnie nie są znane realizacje splotów $KwrC_\infty$ z nieskończoną grupą K za pomocą automatu Mealy'ego. Ponadto jedyna znana minimalna realizacja (za pomocą automatu Mealy'ego) dotyczy najprostszego, nietrywialnego przypadku, tzn. $K = C_2$ ([37]). M. Kambites, P. Silva i B. Steinberg ([46, 72]) skonstruowali także dla dowolnej skończonej grupy abelowej K automat Mealy'go A, dla którego $G(A) \simeq KwrC_\infty$. Jest to tzw. automat resetujący (reset automaton), w którym zarówno zbiór stanów, jak i alfabet, są równe K. Wspomniany wcześniej przypadek minimalny $(K = C_2)$ zasługuje na szczególną uwagę, gdyż badanie grupy generowanej przez ten 2-stanowy automat Mealy'ego pozwoliło znaleźć kontrprzykład na tzw. silną hipotezę Atiyah, dotyczącą możliwych wartości tzw. L^2-liczb Betti'ego ([37]).

W pracy **[P3]** rozszerzyłem na dowolne automaty zmienne w czasie pojęcie automatu dualnego i jego działania na monoidzie wolnym S^* nad zbiorem stanów S. Pojęcie to było znane i badane wcześniej jedynie dla automatów Mealy'ego. W pracy **[P3]** zastosowałem to pojęcie do znalezienia jawnej, a przy okazji wyjątkowo prostej i naturalnej, konstrukcji 2-stanowego automatu A (tzw. automatu birewersyjnego) nad nieograniczonym alfabetem, dla którego grupa $G(A)$ jest nieabelową grupą wolną rangi 2. Nadal otwarty jest problem istnienia 2-stanowego automatu nad ograniczonym alfabetem, który generuje nieabelową grupę wolną. W szczególności nie wiadomo, czy istnieje 2-stanowy automat Mealy'ego generujący nieabelową grupę wolną. Z drugiej strony dla każdego $n \geq 3$ znana jest konstrukcja n-stanowego automatu Mealy'ego nad alfabetem binarnym, który generuje F_n (nieabelową grupę wolną rangi n) ([73, 80]).

Uzyskanie jawnej automatowej realizacji nieabelowej grupy wolnej za pomocą automatów Mealy'ego (tzn. nawet niekoniecznie jako grupy $G(A)$ generowanej przez pojedynczy automat, ale jako podgrupy $G \leq \mathcal{MA}(X^*)$ przekształceń definiowanych przez automaty Mealy'ego nad alfabetem X) wymykało się przez dłuższy czas. W 1983 roku Aleshin ([2]) skonstruował dwa przekształcenia słów nad alfabetem binarnym: jedno definiowane przez pewien 3-stanowy automat Mealy'ego, a drugie przez automat Mealy'ego o pięciu stanach, twierdząc, że generują one F_2. W jego dowodzie znaleziono jednak usterki. Pierwszą automatową realizację grupy F_2 uzyskali A. M. Brunner i S. Sidki ([21]) w 1998 roku, zanurzając pełną grupę liniową $GL_2(C_\infty)$ w grupę $\mathcal{MA}(X^*)$ przekształceń automatowych nad czteroliterowym alfabetem $X = \{1, 2, 3, 4\}$. W 2000 roku A. Oliinyk i W. Suszczański ([65]), rozpatrując grupę nieskończonych macierzy górnotrójkątnych nad dowolnym skończonym ciałem $\mathbb{F}$ jako podgrupę grupy $\mathcal{MA}(\mathbb{F}^*)$, skonstruowali realizację grupy wolnej F_2 za pomocą przekształceń automatowych nad alfabetem binarnym (zob. również [41]). Uzyskanie konkretnej realizacji nieabelowej grupy wolnej za pomocą pojedynczego automatu Mealy'ego okazało się jeszcze trudniejsze. Sidki ([71]) wysunął przypuszczenie, że 3-stanowy automat Aleshina generuje F_3. Między innymi Grigorchuk i Żuk próbowali razem to potwierdzić, ale ostatecznie udało się to rodzeństwu M. Vorobets i Ya. Vorobets ([79]) w 2007 roku. Warto zauważyć, że powyższe trudności kontrastują z rezultatem Bhattacharjee ([13]) z 1995 roku, zgodnie z którym dla dowolnego alfabetu $X = (X_i)_{i \geq 1}$ i dowolnego $n \geq 1$ losowy wybór n-elementowego ciągu automorfizmów drzewa X^* prowadzi prawie na pewno do bazy grupy wolnej F_n, tzn. zbiór tych n-tek, dla których to nie zachodzi jest miary zero (względem miary Haara na grupie $Aut(X^*)$).

W pracy **[P7]** wprowadziłem pojęcia rewersyjności i birewersyjności dla automatów nad dowolnym zmiennym alfabetem $X = (X_i)_{i \geq 1}$. Dla automatów Mealy'ego pojęcie to wprowadzili O. Macedońska, W. Suszczański i V. Nekrashevych w 2000 roku ([56]), zauważając m.in., że grupa automatowa $Bir(X^*)$ składająca się z przekształceń definiowanych przez birewersyjne automaty Mealy'ego nad alfabetem X jest gęstą podgrupą w grupie $\mathcal{MA}(X^*)$ wszystkich przekształceń definiowanych przez automaty Mealy'ego nad alfabetem X, a ponadto w grupie $Comm(F_n)$ automorfizmów wirtualnych grupy wolnej F_n rangi $n := |X|$ (the Commensurateur of F_n) grupa $Bir(X^*)$ stanowi podgrupę tzw. automorfizmów vp-wirtualnych (vp-automorphisms). W 2005 roku Y. Glasner i S. Mozes ([27]) związali z każdym birewersyjnym automatem Mealy'ego tzw. kompleks kwadratowy (square complex) oraz jego uniwersalne nakrycie. Pozwoliło im to skonstruować pierwsze przykłady automatów A, dla których grupa $G(A)$ jest nieabelową grupą wolną. Do dzisiaj jest to jedyny znany sposób konstrukcji automatu Mealy'ego generującego nieabelową grupę wolną. Niedawno I. Bondarenko, D. D'Angeli, E. Rodaro ([16]) skonstruowali pierwszy przykład birewersyjnego automatu Mealy'ego generującego grupę, która nie posiada skończonej prezentacji (jest to splot $C_3 wr C_\infty$). Z kolei I. Klimann ([50]) pokazał, że półgrupa generowana przez dowolny 2-stanowy rewersyjny automat Mealy'ego jest albo skończona, albo wolna. Natomiast T. Godina i I. Klimann ([29]) udowodnili, że spójne i rewersyjne automaty Mealy'ego, w których liczba stanów jest liczbą pierwszą, nie mogą generować nieskończonej grupy torsyjnej.

Przypomnijmy, że automat Mealy'ego $A = (S, X, \varphi, \psi)$ jest nazywany rewersyjnym, jeżeli dla każdej litery $x \in X$ przekształcenie $S \ni s \mapsto \varphi(s, x) \in S$ jest permutacją zbioru stanów. Jeżeli automat A i automat do niego odwrotny (ozn. A^{-1}) są rewersyjne, to A jest nazywany birewersyjnym. W pracy **[P7]** rozszerzyłem w sposób naturalny te definicje na automaty zmienne w czasie. Mianowicie automat $A = (S, X, \varphi, \psi)$ nazwałem rewersyjnym, jeżeli dla dowolnych $i \geq 1$ i $x \in X_i$ przekształcenie $S \ni s \mapsto \varphi_i(s, x) \in S$ jest permutacją zbioru stanów. Jeżeli automat odwrotny A^{-1} również jest rewersyjny, to A nazwałem birewersyjnym.

Przykładem automatu birewersyjnego jest dowolny automat diagonalny. Oczywiście każdy diagonalny automat Mealy'ego generuje grupę skończoną (będącą podgrupą w grupie symetrycznej alfabetu, nad którym pracuje ten automat). Również każda grupa generowana przez automat diagonalny nad alfabetem ograniczonym jest skończona. Sytuacja się zmienia w przypadku alfabetu nieograniczonego. W pracy **[P5]** udowodniłem, że diagonalne automaty samopodobne tworzą w tym przypadku uniwersalny sposób definiowania dowolnych skończenie generowanych skończenie aproksymowalnych grup. Mianowicie pokazałem, że dla dowolnej takiej grupy G i nieograniczonego alfabetu $X = (X_i)_{i \geq 1}$ istnieje taki samopodobny i diagonalny automat $A = (S, X, \varphi, \psi)$, że $G(A) \simeq G$ i $|S| = d(G)$. Dowód tego twierdzenia był jednak wysoce niekonstruktywny – choć nie miałem pojęcia jak w sposób jawny dla konkretnie zadanej, abstrakcyjnej grupy G skonstruować w odpowiednim automacie diagonalnym ciąg $\psi = (\psi)_{i \geq 1}$ funkcji wyjść, to bezpośrednio w oparciu o skończoną aproksymowalność G dowodziłem, że taka konstrukcja jest zawsze wykonalna.

W pracy **[P3]** badałem automaty birewersyjne innego typu. Były to 2-stanowe automaty $A = (\{a, b\}, X, \mathcal{R})$ z następującymi rekursjami splotowymi w i-tym przejściu ($i \geq 1$): $a_i = (b_{i+1}, a_{i+1}, \ldots, a_{i+1})\pi_i$, $b_i = (a_{i+1}, b_{i+1}, \ldots, b_{i+1})\tau_i$, gdzie permutacje $\pi_i, \tau_i \in Sym(X_i)$ tworzą standardowy zbiór generatorów grupy $Sym(X_i)$, tzn. za τ_i można przyjąć dowolną transpozycję, a za π_i – dowolny długi cykl, dla którego litery $x_{1,i}$ i $x_{2,i}$, znajdujące się na pierwszych dwóch pozycjach alfabetu X_i, spełniają warunek: $\tau_i(x_{1,i}) = \pi_i(x_{1,i}) = x_{2,i}$. W pracy **[P3]** dowodziłem, że jeżeli alfabet $X = (X_i)_{i \geq 1}$ jest nieograniczony, a ciąg $(|X_i|)_{i \geq 1}$ jest niemalejący, to $G(A) \simeq F_2$. W pracy **[P7]** pokazałem natomiast, że jeżeli $|X_i| \geq 3$ dla każdego $i \geq 1$ oraz $NWD(|X_i| - 1, |X_{i'}| - 1) = 1$ dla $i \neq i'$, to grupa $G(A)$ działa sferycznie przechodnio na drzewie X^*.

Niewielka modyfikacja powyższych rekursji prowadzi do rekursji $a_i = (a_{i+1}, \ldots, a_{i+1})\pi_i$, $b_i = (b_{i+1}, \ldots, b_{i+1})\tau_i$ dla $i \geq 1$. Grupa G generowana przez powstały w ten sposób 2-stanowy automat diagonalny jest izomorficzna z podgrupą $\langle \pi, \tau \rangle \leq \prod_{i \geq 1} Sym(X_i)$, gdzie $\pi := (\pi_i)_{i \geq 1}$, $\tau := (\tau_i)_{i \geq 1}$. Przypadek $X_i := \{1, \ldots, i+1\}$, $\pi_i := (1, 2, \ldots, i+1)$, $\tau_i := (1, 2)$ był badany w pracach [53, 54] oraz w pracy [D3] (opis pracy [D3] znajduje się na str. 49). W pracy [D3] pokazałem, że komutant G' jest grupą lokalnie skończoną, półgrupa generowana przez π i τ jest wolna, ale G nie zawiera nieabelowych podgrup wolnych. Okazuje się, że G jest nawet średniowalna ([53], Example 4.1). Ponadto, jeżeli dla $I \subseteq \mathbb{N}$ oznaczymy $G_I := \langle \pi_I, \tau_I \rangle$, gdzie ciąg π_I powstaje z π przez zastąpienie permutacji π_i ($i \in I$) permutacjami trywialnymi, to otrzymujemy, że dla dowolnych $I, I' \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4\}$ nierówność $I \neq I'$ implikuje, że grupy G_I i $G_{I'}$ nie są izomorficzne ([54], Proposition 4.1). W rezultacie dostajemy nieprzeliczalnie wiele, parami nieizomorficznych grup $G(A)$ generowanych przez 2-stanowe automaty diagonalne A nad alfabetem $X = (X_i)_{i \geq 1}$.

Jednym z głównych wyników pracy **[P7]** było pokazanie, że dla dowolnego zmiennego alfabetu $X = (X_i)_{i \geq 1}$ następujące dwa zdania są równoważne: (i) istnieje 2-stanowy, birewersyjny automat A nad alfabetem X, dla którego $G(A) \simeq F_2$, (ii) alfabet X jest nieograniczony. W dowodzie powyższej równoważności pokazałem, że jeżeli alfabet X jest ograniczony, to dla każdego 2-stanowego, birewersyjnego automatu A nad alfabetem X grupa $G(A)$ nie może być beztorsyjna. W szczególności nie istnieje 2-stanowy, birewersyjny automat Mealy'ego generujący F_2. W oparciu o konstrukcję automatu z pracy **[P3]**, podałem także jawną i przejrzystą konstrukcję 2-stanowego automatu nad dowolnym nieograniczonym alfabetem $X = (X_i)_{i\geq 1}$, który generuje F_2.

W pracy **[P7]** podałem też kompletną charakteryzację grup $G(A)$ generowanych przez 2-stanowe, birewersyjne automaty A nad alfabetem binarnym (automatów takich oczywiście jest nieprzeliczalnie wiele). Okazuje się, że wszystkie te grupy są skończonymi grupami abelowymi i jest ich pięć: grupa trywialna, C_2, $C_2 \times C_2$, C_4 i $C_2 \times C_4$. Jedynie pierwsze trzy mogą być zrealizowane za pomocą odpowiedniego automatu Mealy'ego. Rozpatrywałem także klasę $IR_{2,2}$ grup $G(A)$ generowanych przez 2-stanowe, rewersyjne automaty A nad alfabetem binarnym, jak również klasę $BIR_{2,3}$ grup $G(A)$ generowanych przez 2-stanowe, birewersyjne automaty A nad alfabetem $X = \{1, 2, 3\}$. Pokazałem, że każda z tych klas zawiera nieskończenie wiele, parami nieizomorficznych grup skończonych.

W pracy **[P4]** wprowadziłem dla dowolnego $m \geq 2$ i abstrakcyjnej grupy G pojęcie rangi automatowej $ar(G, m)$ jako najmniejszej liczby stanów w automacie Mealy'ego A nad alfabetem m-literowym, dla którego zachodzi izomorfizm $G(A) \simeq G$. Oczywiście mamy zawsze: $ar(G, m) \geq d(G)$ (jeżeli nie istnieje odpowiedni automat, to przyjmujemy $ar(G, m) := \infty$). Przykładowo, znane obecnie realizacje automatowe nieabelowych grup wolnych F_n ($n \geq 3$) prowadzą do równości $ar(F_n, 2) = d(F_n) = n$ dla każdego $n \geq 3$. Z kolei dla żadnego $m \geq 2$ nie jest znana dokładna wartość $ar(F_2, m)$; choć prawdziwe jest oszacowanie $4 \leq ar(F_2, 2) \leq 6$. Korzystając natomiast z automatowej realizacji grup Baumslaga-Solitara $BS(1, k) := \langle a, t \colon tat^{-1} = a^k\rangle$, uzyskanej w pracy L. Bartholdiego i Z. Šunića ([8]), od razu wywnioskowałem (**[P4]**), że dla dowolnych $m, n \geq 2$ istnieje grupa G, dla której $d(G) = 2$ i $n \leq ar(G, m) < \infty$.

W pracy **[P4]** skonstruowałem dla dowolnych $n \geq 1$ i $m \geq 2$ optymalny automat Mealy'ego nad alfabetem m-literowym, który generuje abelową grupę wolną C_∞^n rangi n, wyznaczając tym samym rangi automatowe abelowych grup wolnych. Okazało się, że nie zawsze optymalna konstrukcja przynosi automat minimalny (tzn. automat o n stanach) – w przypadku $m = 2$ lub $n = 1$ optymalny automat ma $n + 1$ stanów. Posłużyłem się w tym celu rezultatem Nekrashevycha i Sidki ([62]), zgodnie z którym każda samopodobna grupa automorfizmów drzewa $\{0, 1\}^*$, będąca abelową grupą wolną, musi być zwężająca.

Można też zaproponować szersze podejście, definiując dla dowolnej abstrakcyjnej grupy G jej spektrum automatowe $sa(G)$, czyli zbiór takich par $(n, m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, że izomorfizm $G(A) \simeq G$ zachodzi dla pewnego n-stanowego automatu Mealy'ego A nad alfabetem m-literowym. Jeżeli $(n, m) \in sa(G)$, to oczywiście $(n', m') \in sa(G)$ dla dowolnych naturalnych $n' \geq n$ i $m' \geq m$. Oznaczając zatem $[n] := \{n, n + 1, \ldots\}$, otrzymujemy: $sa(G) = \emptyset$ albo istnieje dokładnie jedna liczba $k \in \mathbb{N}$ (nazwałem ją szerokością automatową grupy G), że $sa(G) = ([n_1] \times [m_1]) \cup \ldots \cup ([n_k] \times [m_k])$ dla pewnych jednoznacznie określonych ciągów $(n_i)_{1\leq i\leq k}$, $(m_i)_{1\leq i\leq k}$ liczb naturalnych, przy czym pierwszy z tych ciągów jest ściśle rosnący, a drugi – ściśle malejący. W pracy **[P4]** wykazałem równości $sa(C_\infty) = [2] \times [2]$ i $sa(C_\infty^n) = ([n] \times [3]) \cup ([n + 1] \times [2])$ dla $n > 1$. Obecnie potrafię wyznaczyć spektrum automatowe pozostałych grup homocyklicznych, a także pewnych innych skończonych grup abelowych (praca w przygotowaniu). Przykładowo, dla dowolnych $n \geq 1$ i $m \geq 2$ zachodzi równość $sa(C_m^n) = [n] \times [\gamma(m)]$, gdzie $\gamma(m)$ definiuję następująco: jeżeli $m = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \ldots p_t^{\mu_t}$ jest rozkładem kanonicznym liczby m, to $\gamma(m) = p_1^{\mu_1} + p_2^{\mu_2} + \ldots + p_t^{\mu_t}$ (w szczególności, przyjmując $\gamma(1) := 0$, dostaję funkcję addytywną $\gamma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$). Ponadto, jeżeli G jest nietrywialną skończoną grupą abelową oraz $G \simeq C_{m_1}^{n_1} \times C_{m_1 m_2}^{n_2} \ldots \times C_{m_1\ldots m_k}^{n_k}$ ($n_i \geq 1$, $m_i \geq 2$) jest jej rozkładem kanonicznym Shmitta, to oznaczając $\gamma(G) := \gamma(m_1) + \ldots + \gamma(m_k)$, otrzymałem: $(d(G) + 1, \gamma(G)) \in sa(G)$, a jeżeli $n_1 > 1$, to $(d(G), \gamma(G)) \in sa(G)$; jeżeli wreszcie $NWD(m_i, m_{i'}) = 1$ dla $i \neq i'$, to $sa(G) = [d(G)] \times [\gamma(G)]$. W szczególności chciałbym wiedzieć, czy istnieje grupa G z szerokością automatową większą niż dwa. Przypuszczam, że takie grupy można znaleźć nawet wśród skończonych grup abelowych, dla których zachodzą równości $m_1 = m_2 = \ldots = m_k$ w powyższym rozkładzie.

W pracy **[P6]** dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ i dowolnej grupy abelowej G pokazałem, że izomorfizm $G \simeq G(A)$ zachodzi dla pewnego n-stanowego automatu A (zmiennego w czasie) nad alfabetem binarnym $X = \{0, 1\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(G) \leq n$ oraz część torsyjna grupy G jest 2-grupą. Ponadto dla każdej takiej grupy G podałem jawną konstrukcję odpowiedniego automatu A. Jako wniosek dostałem, że istnieje nieskończenie wiele, parami nieizomorficznych grup $G(A)$, gdzie A jest 2-stanowym automatem nad alfabetem binarnym (pamiętamy, że 2-stanowe automaty Mealy'ego nad alfabetem binarnym generują jedynie sześć różnych grup). W pracy **[P6]** osobno rozpatrywałem przypadek automatów Mealy'ego, uzyskując analogiczną charakteryzację grup abelowych generowanych przez n-stanowe automaty Mealy'ego nad alfabetem binarnym. W szczególności dostałem, że istnieje dokładnie $2n$ tego typu grup (z dokładnością do izomorfizmu) i każda z nich jest elementarną abelową 2-grupą albo abelową grupą wolną. Zauważmy też, że liczba wszystkich (z dokładnością do izomorfizmu automatów) n-stanowych automatów Mealy'ego nad alfabetem binarnym jest skończona i wynosi $2^n \cdot n^{2n}$.

Możemy oczywiście dla dowolnych $m, n \geq 1$ rozpatrywać klasę $\mathcal{GTV}(n, m)$ wszystkich grup (z dokładnością do izomorfizmu) postaci $G(A)$, gdzie A jest n-stanowym automatem zmiennym w czasie nad alfabetem m-literowym. Dla każdego $n \geq 1$ klasa $\mathcal{GTV}(n, 1)$ składa się tylko z grupy trywialnej, a dla $m \geq 1$ klasa $\mathcal{GTV}(1, m)$ jest skończona i składa się jedynie z pewnych skończonych grup cyklicznych. Najmniejszy zatem ciekawy przypadek to klasa $\mathcal{GTV}(2, 2)$, która, wobec powyższego rezultatu, jest nieskończona. Z drugiej strony, istnieje nieprzeliczalnie wiele (z dokładnością do izomorfizmu automatów) 2-stanowych automatów nad alfabetem binarnym. Powstaje zatem pytanie, czy klasa $\mathcal{GTV}(2, 2)$ jest nieprzeliczalna. Jakie inne grupy (poza abelowymi) leżą w tej klasie? W szczególności, czy nieabelowa grupa wolna należy do tej klasy? A może każda 2-generowana skończenie aproksymowalna 2-grupa leży w tej klasie? Czy w klasie tej istnieje grupa z nierozwiązalnym problemem słów? W przypadku ostatniego pytania, to nie wiadomo nawet, czy klasa grup generowanych przez automaty nad alfabetem ograniczonym zawiera grupę z nierozwiązalnym problemem słów (pamiętamy, że w klasie grup generowanych przez automaty Mealy'ego problem słów jest rozwiązalny). Z drugiej strony, można podać konstruktywny przykład 2-stanowego automatu diagonalnego A nad alfabetem nieograniczonym, dla którego grupa $G(A)$ ma nierozwiązalny problem słów. Przykład ten bazuje na konstrukcji 2-generowanej skończenie aproksymowalnej grupy, uzyskanej w 2009 roku przez G. Baumslaga i Ch. F. Millera III ([11]) za pomocą grup B. H. Neumanna z 1937 roku.

3.2 Wyniki uzyskane w ramach pracy doktorskiej – prace [D1]–[D5]

Pracę doktorską, zatytułowaną „*Automaty Mealy'ego zmienne w czasie i grupy generowane przez te automaty*", napisałem pod kierunkiem prof. dr. hab. Witalija Suszczańskiego (Vitaliy Ivanovich Sushchansky) i obroniłem w czerwcu 2005 roku na Wydziale Matematyczno-Fizyczno-Chemicznym Uniwersytetu Śląskiego. Na dorobek naukowy uzyskany w ramach tej pracy składają się następujące publikacje:

[D1] A. Woryna, *Odwzorowania określone za pomocą automatów Mealy'ego zmiennych w czasie*, ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ, Seria: AUTOMATYKA, z. 138 (2003), 201–215,

[D2] A. Woryna, *On representation of a semi-direct product of cyclic groups by a 2-state time-varying Mealy automaton*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria: Matematyka-Fizyka, z. 91 (2004), 343–354,

[D3] A. Woryna, *On permutation groups generated by time-varying Mealy automata*, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 67 (1-2) (2005), 115–130; IF 0.238,

[D4] A. Woryna, *Representations of a free group of rank two by time-varying Mealy-automaton*, Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications, 25 (2005), 119–134,

[D5] A. Woryna, *On generation of wreath products of cyclic groups by two state time varying mealy automata*, International Journal of Algebra and Computation, 16 (2) (2006), 398–415; IF 0.357.

W pracach **[D1]**–**[D5]** rozważałem jeszcze szerszą klasę automatów, dopuszczając możliwość zmian również zbiorów stanów w kolejnych taktach pracy automatu. Nazwałem te automaty zmiennymi w czasie automatami Mealy'ego. Formalnie automat taki zdefiniowałem jako piątkę $A = (S, X, Y, \varphi, \psi)$, gdzie $(S_i)_{i\geq 1}$ jest ciągiem zbiorów stanów, $X = (X_i)_{i\geq 1}$ i $Y = (Y_i)_{i\geq 1}$ są zmiennymi alfabetami, odpowiednio, wejściowym i wyjściowym, $\varphi = (\varphi_i)_{i\geq 1}$ jest ciągiem funkcji przejść postaci $\varphi_i \colon S_i \times X_i \to S_{i+1}$, $\psi = (\psi_i)_{i\geq 1}$ – ciągiem funkcji wyjść $\psi_i \colon S_i \times X_i \to Y_i$. Dla każdego stanu $s \in S_1$ zdefiniowałem, analogicznie jak dla automatu z definicji 2, funkcję automatową $\widetilde{s} \colon X^* \to Y^*$.

W pracy **[D1]** badano jedynie strukturalne własności takich automatów, wyodrębniono różne naturalne ich podklasy, w tym podklasę automatów z ustalonym zbiorem stanów, automatów okresowych oraz automatów permutacyjnych. Zdefiniowano i badano pojęcie równoważności automatów, za pomocą którego porównywano różne modele automatów i wyodrębniono automaty o prostszej strukturze. W oparciu o relacje zachowywania początków i długości słów, scharakteryzowano funkcje automatowe $f \colon X^* \to Y^*$ oraz przekształcenia $f \colon X^* \to X^*$ definiowane przez automaty permutacyjne. Stosując pojęcie reszty przekształcenia automatowego, scharakteryzowano funkcje definiowane przez automaty okresowe.

W pracy **[D3]** wprowadziłem pojęcie grupy $\mathcal{GA}(X^*)$ wszystkich przekształceń definiowanych przez permutacyjne zmienne w czasie automaty Mealy'ego nad alfabetem wejściowo-wyjściowym $X = (X_i)_{i\geq 1}$. Opisałem naturalny izomorfizm tej grupy z nieskończenie iterowanym splotem permutacyjnym $\wr_{i=1}^{\infty} Sym(X_i)$. Wprowadzono pojęcie grupy $G(A) = \langle \widetilde{s} \colon s \in S_1 \rangle$ generowanej przez pojedynczy automat permutacyjny $A = (S, X, X, \varphi, \psi)$. Udowodniono, że każda n-generowana ($n \geq 1$) skończenie aproksymowalna grupa G jest izomorficzna z grupą $G(A)$ generowaną przez pewien n-stanowy automat A. Dla każdego $n \geq 1$ skonstruowano i zbadano 2-stanową realizację automatową dla grupy dualnej do grupy migających żarówek $C_n wr C_\infty$, czyli dla splotu regularnego $C_\infty wr C_n$. Rozważano też 2-stanowy automat diagonalny A nad alfabetem $X = (X_i)_{i\geq 1}$, w którym $X_i := \{1, \ldots, i+1\}$, a etykietki obydwu stanów w i-tym przejściu ($i \geq 1$) tworzą standardowy zbiór generatorów grupy $Sym(X_i)$, czyli transpozycję $\alpha_i := (1, 2)$ i cykl $\beta_i := (1, 2, \ldots, i+1)$. Pokazano, że grupa $G := G(A)$ generowana przez ten automat działa sferycznie przechodnio, zawiera izomorficzną kopię każdej skończonej grupy, nie zawiera nieabelowych podgrup wolnych, ale półgrupa generowana przez obydwa automatowe generatory jest wolna. Pokazano też, że komutant G' jest grupą lokalnie skończoną, a abelianizacja G/G' jest izomorficzna z iloczynem $C_2 \times C_\infty$.

W pracy **[D2]** rozważałem tzw. Q-adyczną maszynę sumującą (Q-adic adding machine – [10]), gdzie $Q = (n_i)_{i\geq 1}$ jest dowolnym ciągiem liczb naturalnych większych od 1. Można taką maszynę zdefiniować jako automorfizm cykliczny $a \in Aut(X^*)$, opisany następującym ciągiem rekursji splotowych: $a_i = (id_{i+1}, \ldots, id_{i+1}, a_{i+1})\sigma_i$ dla $i \geq 1$, gdzie $id_i := id_{X^*_{(i)}}$, a permutacja $\sigma_i \in Sym(X_i)$ jest długim cyklem. Automorfizm a pojawia się często (szczególnie w wersji regularnej) przy różnych realizacjach automatowych, a jego własności są ciągle badane. Pokazuje się na przykład, że dowolny automorfizm $g \in Aut(X^*)$ jest sprzężony z a wtedy i tylko wtedy, gdy grupa cykliczna $\langle g \rangle$ działa sferycznie przechodnio na X^* ([10]). Widzimy, że automorfizm a jest definiowany przez automat o dwóch stanach i jest to dla niego minimalna liczba stanów. W pracy **[D2]** interesowało mnie, co się stanie, jeżeli do maszyny sumującej dołączę inny nietrywialny automorfizm cykliczny $b \in Aut(X^*)$, który w możliwie najmniejszym stopniu ingeruje w strukturę automatową automorfizmu a, tzn. nie wprowadza do układu $\{a, b\}$ nowych stanów i nie zmienia (w tym układzie) funkcji przejść związanych z automorfizmem a. Co można wówczas powiedzieć o grupie generowanej przez takie dwa automorfizmy? Jednym z najprostszych takich „minimalnie ingerujących" automorfizmów b jest automorfizm z rekursją splotową $b = (a_2, id_2, \ldots, id_2)\sigma_1$. W pracy **[D2]** pokazałem, że grupa $G(A) := \langle a, b \rangle$ generowana przez powstały w ten sposób 2-stanowy automat A jest izomorficzna z podgrupą $K := W' \cdot C_\infty$ iloczynu półprostego $W := C_\infty^{n_1} \rtimes C_\infty$ z działaniem C_∞ na $C_\infty^{n_1}$ przez cykliczne lewostronne przesunięcia. Grupa K jest przykładem beztorsyjnej metabelowej grupy, która nie jest nilpotentna; jej centrum jest izomorficzne z C_∞, komutant izomorficzny z $C_\infty^{n_1-1}$, a abelianizacja z $C_\infty \times C_{n_1}$. W szczególności powyższa konstrukcja opisuje sferycznie przechodnie działanie grupy K na drzewie X^*. W pracy **[D2]** scharakteryzowałem także stabilizatory $Stab_{G(A)}(w)$, $Stab_{G(A)}(m)$, $Stab_{G(A)}(u)$ ($w \in X^*$, $u \in X^\omega$, $m > 0$) oraz orbity działania na zbiorze X^ω słów nieskończonych. Wyprowadziłem również prezentację grupy względem generatorów a i b.

W pracy **[D4]** wyprowadzono dwie różne realizacje automatowe nieabelowej grupy wolnej F_2. W pierwszej zastosowano 2-stanowy automat diagonalny $A = (\{s_1, s_2\}, X, X, \varphi, \psi)$ nad alfabetem $X = (X_i)_{i \geq 1}$, w którym $X_i = \{1, \ldots, i\}$ dla $i \geq 1$. Zauważono, że funkcje wyjść w tym automacie można zbudować w oparciu o relację $\preceq$ porządku leksykograficznego w zbiorze zredukowanych słów grupowych z liter a i b, wychodząc od relacji $\epsilon \preceq a \preceq a^{-1} \preceq b \preceq b^{-1}$. Skonstruowano następnie dwie permutacje $a, b \in Sym(\mathbb{N})$ o tej własności, że jeżeli $W = W(a, b)$ jest słowem grupowym na n-tej pozycji ($n \geq 1$), to dla złożenia $\mathcal{W} \in Sym(\mathbb{N})$ odpowiadającego słowu W zachodzi $\mathcal{W}(1) = n$. Pokazano wreszcie, że funkcje wyjść $\psi_i \colon \{s_1, s_2\} \times X_i \to X_i$ można zdefiniować w następujący sposób: $\psi_i(s_1, x) = a(x)$ dla $x \in a^{-1}(X_i)$, $\psi_i(s_1, x) = a_i(x)$ dla $x \notin a^{-1}(X_i)$, $\psi_i(s_2, x) = b(x)$ dla $x \in b^{-1}(X_i)$, $\psi_i(s_2, x) = b_i(x)$ dla $x \notin b^{-1}(X_i)$, gdzie $a_i \colon X_i \setminus a^{-1}(X_i) \to X_i \setminus a(X_i)$ i $b_i(x) \colon X_i \setminus b^{-1}(X_i) \to X_i \setminus b(X_i)$ są dowolnymi bijekcjami. Podano również jawny, analityczny opis permutacji a i b. Okazał się on jednak zbyt złożony, tak że realizacja ta, choć zadana jawnie i w sposób diagonalny, nie dawała widocznych szans na dalsze badanie grupy $G(A)$ i jej działania na drzewie X^*.

Druga opisana w pracy **[D4]** realizacja grupy F_2 opierała się na automacie nad alfabetem $X = (X_i)_{i \geq 1}$, w którym $X_i = \{1, 2, \ldots i+2\}$ dla $i \geq 1$. Na przykładzie tej konstrukcji pokazano, że funkcje wyjść w automacie generującym F_2 można opisać znacznie prościej – etykietki stanów w i-tym przejściu ($i \geq 1$) mogą być kolejnymi potęgami cyklu $(2, 3, \ldots, i+2)$. Jednak definiując funkcje przejść, pojawiała się konieczność wprowadzania nowych stanów, tak że dla i-tego przejścia liczba stanów wynosiła $i+2$ – zatem nie był to automat z ustalonym zbiorem stanów.

Wspomniana juz wcześniej praca **[D5]** była ostatnim, ale też najciekawszym rezultatem mojej pracy doktorskiej. Skonstruowano w niej 2-stanowy automat $A = (\{a, b\}, X, X, \mathcal{R})$ z ciągiem $\mathcal{R} = (\mathcal{R})_{i \geq 1}$ rekursji splotowych, w którym układ $\mathcal{R}_i$ składał się z następujących dwóch rekursji: $a_i = (b_{i+1}, a_{i+1}, \ldots, a_{i+1})$, $b_i = (a_{i+1}, \ldots, a_{i+1})\sigma_i$, gdzie permutacja $\sigma_i \in Sym(X_i)$ była dowolnym długim cyklem. Główny wynik to obserwacja, że jeżeli $NWD(n_i, n_{i'}) = 1$ dla $i \neq i'$, to automat A generuje splot $\wr_{i=1}^{\infty} C_{n_i}$. Dla grupy $G := G(A)$ wyprowadzono również następujące własności (w samej publikacji **[D5]** zauważono dodatkowo, że G jest słabo rozgałęziona): G jest beztorsyjną grupą z trywialnym centrum, działa sferycznie przechodnio na drzewie X^*, nie posiada skończonej prezentacji, półgrupa generowana przez automatowe generatory jest wolna, a abelianizacja G/G' jest izomorficzna z $C_\infty \times C_\infty$.

3.3 Wyniki spoza teorii grup – prace [S1]–[S5]

W poniższych pracach rozważałem pewne problemy spoza teorii grup.

[S1] A. Woryna, *Liczby Stirlinga, a skoki narciarskie*, Delta, 11 (2001), 6–7,

[S2] A. Woryna, *The solution of a generalized secretary problem via analytic expressions*, Journal of Combinatorial Optimization, 33 (4) (2017), 1469–1491; IF 1.235,

[S3] A. Woryna, *On the set of uniquely decodable codes with a given sequence of code word lengths*, Discrete Mathematics, 340 (2) (2017), 51–57; IF 0.639,

[S4] A. Woryna, *On the ratio of prefix codes to all uniquely decodable codes with a given length distribution*, (under review),

[S5] A. Woryna, *On the ratio of prefix codes to all uniquely decodable codes with the three-element sequence of code-word lengths*, (under review).

W pracy **[S1]** rozważałem następujący problem: ilu przeciętnie skoczków uzyska tytuł tymczasowego lidera podczas jednej serii konkursu skoków narciarskich? W całej serii bierze udział $n \geq 1$ skoczków i po każdym skoku liderem tymczasowym zostaje ten skoczek, który oddał najlepszy do tej pory skok. Zakładamy przy tym, że w konkursie nie ma faworytów i że żadne dwa skoki nie zostaną ocenione tak samo (problem przyszedł mi do głowy, będąc pod wrażeniem skoków naszego „Orła z Wisły"; w szczególności pierwsze założenie nie było zbyt szczęśliwe). Pokazałem, że dla dowolnego $1 \leq k \leq n$ prawdopodobieństwo tego, że w trakcie całej serii dokładnie k skoczków uzyska tytuł tymczasowego lidera wynosi $S(n,k)/n!$, gdzie $S(n,k)$ jest odpowiednią liczbą Stirlinga (pierwszego rodzaju). W rezultacie otrzymałem, że rozwiązaniem powyższego problemu jest n-ta liczba harmoniczna $\sum_{i=1}^{n} 1/i$.

W pracy **[S2]** odkryłem nieznane wcześniej, kombinatoryczne formuły, które pozwalają opisać analitycznie tzw. ciąg optymalny, stanowiący rozwiązanie jednej z uogólnionych wersji słynnego problemu sekretarek. Wcześniej rozwiązanie to było znajdowane wyłącznie poprzez algorytmy stosujące mechanizmy programowania dynamicznego lub liniowego, co pozwalało obliczać to rozwiązanie tylko w sposób numeryczny. Wydaje mi się, że takie czysto kombinatoryczne podejście można wykorzystać również do badania pewnych szerszych wersji problemu sekretarek, otrzymując w ten sposób pewne uproszczenia w znanych dotychczas formułach. Uzyskaną konstrukcję ciągu optymalnego chcę również wykorzystać w kolejnej pracy, do badania asymptotycznego zachowywania się wartości ciągu optymalnego, otrzymując, być może, odpowiedzi na otwarte nadal pytania dotyczące tej asymptotyki. Inspiracją do napisania pracy **[S2]** była książka Jakuba Szczepaniaka *Matematyka nie tylko dla zakochanych*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 2010.

W pracy **[S3]** badałem pewne ważne klasy kodów alfabetycznych z zadaną dystrybucją długości słów kodowych. Dla dowolnych kodów alfabetycznych możliwe ciągi długości słów kodowych charakteryzuje znana nierówność Krafta (która charakteryzuje także odpowiednie ciągi dla kodów bezprefiksowych). Dla innych, naturalnych klas kodów (np. dla kodów bifiksowych) odpowiednia charakteryzacja nie jest już znana i wiele pytań w tym temacie, nawet elementarnych, pozostaje otwartych. W pracy **[S3]** oznaczyłem przez $UD_n(L)$ (odp. $PR_n(L)$, odp. $FD_n(L)$) zbiór wszystkich kodów (odp. kodów bezprefiksowych, odp. kodów o skończonym opóźnieniu) nad alfabetem n-literowym i z dystrybucją długości słów kodowych L. Główne wyniki tej pracy to: (1) pokazanie nierówności $|UD_n(L)|/|PR_n(L)| \geq 1 + r_a r_b/|PR_n(a,b)|$, gdzie r_a (odp. r_b) to ilość wystąpień elementu a (odp. elementu b) w ciągu L, (2) pokazanie, że równość $FD_n(L) = UD_n(L)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg L ma długość co najwyżej 2 lub jest postaci (z dokładnością do uporządkowania elementów) $L = (a, a, \ldots, a, b)$ dla a i b spełniających podzielność $a \mid b$.

W pracy **[S4]** badałem proporcje $\rho_{n,L} = |PR_n(L)|/|UD_n(L)|$ i podałem nietrywialne ograniczenie dolne oraz górne dla wartości $\xi_{n,m} := \inf_L \rho_{n,L}$, gdzie infimum jest wzięte po wszystkich ciągach L długości $m \geq 1$, dla których $UD_n(L) \neq \emptyset$. W szczególności dostałem: $\lim_{n\to\infty} \xi_{n,m} = 1$ dla każdego $m \geq 1$ oraz $\lim_{m\to\infty} \xi_{n,m} = 0$ dla każdego $n \geq 2$. Mamy oczywiście $\xi_{n,1} = 1$ dla każdego $n \geq 2$. W pracy **[S4]** posłużyłem się znaną charakteryzacją kodów długości dwa do znalezienia dokładnej wartości $\xi_{n,2}$. Choć obecnie nie jest znana żadna charakteryzacja kodów długości trzy, to ostatnio udało mi się wyprowadzić formułę na $\xi_{n,3}$ (**[S5]**). Do zgłębiania tematyki poruszanej w pracach **[S3, S4, S5]** zainspirowały mnie zajęcia, jakie prowadziłem w ramach przedmiotu *Teoria informacji i kryptografia* ze studentami kierunku Matematyka, na moim macierzystym Wydziale Matematyki Stosowanej Politechniki Śląskiej.

Literatura

[1] S. V. Aleshin, *Finite automata and Burnside problem on periodic groups*, Mathematical Notes, 11 (3) (1972), 199–203,

[2] S. V. Aleshin, *A free group of finite automata*, Moscow University Mathematics Bulletin, 38 (1983), 10–13,

[3] R. A. Bailey, *A unified approach to design of experiments*, Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 144 (2) (1981), 214–223,

[4] C. Bailey, C. E. Praeger, C. A. Rowley, T. Speed, *Generalized wreath product of permutation groups*, Proceedings of the London Mathematical Society, 47 (3) (1983), 69–82,

[5] K. Balasubramanian, *Graph theoretical characterization of NMR groups, nonrigid nuclear spin species and the construction of symmetry adapted NMR spin functions*, The Journal of Chemical Physics, 73 (7) (1980), 3321–3337,

[6] L. Bartholdi, R. I. Grigorchuk, Z. Šunić, *Branch groups* in Handbook of Algebra vol. 3, edited by M. Hazewinkel, North-Holland, Amsterdam, 989–1112, 2003,

[7] L. Bartholdi, V. Kaimanovich, V. Nekrashevych, *On amenability of automata groups*, Duke Mathematical Journal, 154 (3) (2010), 575–598,

[8] L. Bartholdi, Z. Šunić, *Some solvable automaton groups*, Contemporary Mathematics, 394 (2006), 11–30,

[9] L. Bartholdi, B. Virág, *Amenability via random walks*, Duke Mathematical Journal, 130 (1) (2005), 39—56,

[10] H. Bass, M. Otero-Espinar, D. Rockmore, C. P. L. Tresser, *Cyclic Renormalization and the Automorphism Groups of Rooted Trees*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, v.1621, 1995,

[11] G. Baumslag, Ch. F. Miller III, *Reflections on some groups of B. H. Neumann*, Journal of Group Theory 12 (2009), 771—781,

[12] M. Bhattacharjee, *The probability of generating certain profinite groups by two elemets*, Israel Journal of Mathematics, 86, (1994), 311–329,

[13] M. Bhattacharjee, *The Ubiquity of Free Subgroups in Certain Inverse Limits of Groups*, Journal of Algebra, 172 (1995), 134-146,

[14] Y. V. Bodnarchuk, V. I. Sushchansky, *Computation of the Sylow 2-subgroup of a symmetric group of degree which is a power of 2*, Computations in Algebra and Combinatorics, Kiev, 1978,

[15] I. Bondarenko, *Finite generation of iterated wreath products*, Archiv der Mathematik, 95 (2010), 301–308,

[16] I. Bondarenko, D. D'Angeli, E. Rodaro, *The lamplighter group $\mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}$ generated by a bireversible automaton*, Communications in Algebra, 44 (12) (2016), 5257—5268,

[17] I. Bondarenko, R. I. Grigorchuk, R. Kravchenko, Y. Muntyan, V. Nekrashevych, Z. Šunić, D. Savchuk. *Groups generated by 3-state automata over a 2-letter alphabet II*, Journal of Mathematical Sciences, 156 (1) (2009), 187–208,

[18] I. Bondarenko, I. Samoilovych, *On finite generation of self-similar groups of finite type*, International Journal of Algebra and Computation, 23 (1) (2013), 69–79,

[19] I. Bondarenko, D. Savchuk, *On Sushchansky p-groups*, Algebra and Discrete Mathematics, 2 (2007), 22–42,

[20] J. Brieussel, *Amenability and non-uniform growth of some directed automorphism groups of a rooted tree*, Mathematische Zeitschrift, 263 (2) (2009), 265–293,

[21] A. M. Brunner, S. Sidki, *The generation of $GL(n, \mathbb{Z})$ by Finite State Automata*, International Journal of Algebra and Computation, 8 (1) (1998), 127–139,

[22] T. Delzant, R. I. Grigorchuk, *Homomorphic Images of Branch Groups, and Serre's Property (FA)*, Birkhäuser, Verlag Basel/Switzerland, 2007, Progress in Mathematics, 265, 353-375,

[23] E. Detomi, A. Lucchini, *Characterization of finitely generated infinitely iterated wreath products*, Forum Mathematicum, 25 (4) (2013), 867–886,

[24] A. Erschler, *Automatically presented groups*, Groups, Geometry, and Dynamics, 1 (2007), 47—59,

[25] E. Fink, *A finitely generated branch group of exponential growth without free subgroups*, Journal of Algebra, 397 (2014) 625—642,

[26] P. W. Gawron, V. Nekrashevych, V. I. Sushchansky, *Conjugation in Tree Automorphism Groups*, International Journal of Algebra and Computation, 11 (5) (2001), 529–547,

[27] Y. Glasner, S. Mozes, *Automata and square complexes*, Geometriae Dedicata, 111 (2005), 43–64,

[28] V. M. Glushkov, *Abstract theory of automata*, Russian Mathematical Surveys, 16 (5) (1961), 1–53,

[29] T. Godin, I. Klimann, *Connected reversible Mealy automata of prime size cannot generate infinite Burnside groups* (2016), DOI 10.4230/LIPIcs.MFCS.2016.44,

[30] R. I. Grigorchuk, *On Burnside's problem on periodic groups*, Functional Analysis and Its Applications, 14 (1) (1980), 41—43,

[31] R. I. Grigorchuk, *On Milnor's problem of group growth*, Soviet Mathematics Doklady, 28 (1983), 23–26,

[32] R. I. Grigorchuk, *Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, 25 (2) (1985), 259–300,

[33] R. I. Grigorchuk, *Just Infinite Branch Groups, New Horizons in pro-p Groups*, Birkhäuser, Boston, 2000, Progress in Mathematics, 184, 121–179,

[34] R. I. Grigorchuk, *Solved and Unsolved Problems around One Group, Infinite Groups: Geometric, Combinatorial and Dynamical Aspects*, Birkhäuser, Basel, 2005, Progress in Mathematics, 248, 117–218,

[35] R. I. Grigorchuk, V. Nekrashevich, V. I. Sushchansky, *Automata, Dynamical Systems and Groups*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 231 (2000), 128—203,

[36] R. I. Grigorchuk, V. Nekrashevych, Z. Šunić, *Hanoi Towers groups*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Report No. 19/2006, Topological and Geometric Methods in Group Theory, 1179–1182,

[37] R. I. Grigorchuk, A. Żuk, *The Lamplighter Group as a Group Generated by a 2-state Automaton and its spectrum*, Geometriae Dedicata, 87 (2001), 209–244,

[38] R. I. Grigorchuk, A. Żuk, *On a torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton*, International Journal of Algebra and Computation, 12 (1) (2002), 1–24,

[39] K. W. Gruenberg, *Residual properties of infinite soluble groups*, Proceedings of the London Mathematical Society, (3) 7 (1957), 29-–62,

[40] N. Gupta, S. Sidki, *Some infinite p-groups*, Algebra and Logic, 22 (5) (1983), 421–424,

[41] W. Hołubowski, *Free subgroups of the group of infinite unitriangular matrices*, International Journal of Algebra and Computation, 13 (1) (2003), 81–86,

[42] I. D. Ivanyuta, *Sylow p-subgroups of the countable symmetric group*, Ukrainian Mathematical Journal, 15 (3) (1963), 240–249,

[43] K. Juschenko, *Non-elementary amenable subgroups of automata groups*, Journal of Topology and Analysis, doi.org/10.1142/S179352531850005X,

[44] G. A. Jones, *Cyclic regular subgroups of primitive permutation groups*, Journal of Group Theory, 5 (4) (2002), 403–407.

[45] K. Juschenko, V. Nekrashevych, M. de la Salle, *Extensions of amenable groups by recurrent groupoids*, Inventiones mathematicae, 206 (3) (2016), 837–867,

[46] M. Kambites, P. Silva, B. Steinberg, *The spectra of lamplighter groups and Cayley machines*, Geometriae Dedicata, 120 (1) (2006), 193–227.

[47] L. Kaloujnine, *Sur les p-groupes de Sylow du groupe symétrique de degré p^m*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 221 (1945), 222–224,

[48] L. Kaloujnine, *Sur les p-groupes de Sylow des groupes symétriques finis*, Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 65 (1948), 239–279,

[49] C. S. H. King, *Generation of finite simple groups by an involution and an element of prime order*, Journal of Algebra, 478 (2017), 153-173,

[50] I. Klimann, *Automaton Semigroups: The Two-state Case*, Theory of Computing Systems, 58 (2016), 664—680,

[51] M. Leyton, *A Generative Theory of Shape*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 2145, Springer-Verlag, Berlin, 2001,

[52] P. A. Linnell, D. Warhurst, *Bounding the number of generators of a polycyclic group*, Archiv der Mathematik, 37 (1981), 7–17,

[53] A. Lubotzky, B. Weiss, *Groups and Expanders*, Expanding graphs (Princeton, NJ, 1992), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1993), 95–109. MR1235570 (95b:05097),

[54] A. Lubotzky, L. Pyber, A. Shalev, *Discrete groups of slow subgroup growth*, Israel Journal of Mathematics, 96 (1996), 399–418,

[55] A. Lucchini, *Generating wreath products and their augmentation ideals*, The Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova, 98 (1997), 67–87,

[56] O. Macedońska, V. V. Nekrashevich, V. I. Sushchansky, *Commensurators of Groups and Reversible Automata*, Dopovidi NAN Ukrainy, N12 (2000), 36–39.

[57] J. D. P. Meldrum, *Wreath Products of Groups and Semigroups, vol. 74 of Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, Longman, Harlow, UK, 1995,

[58] B. Mikołajczak, *Algebraiczna i strukturalna teoria automatów*, PWN Warszawa - Łódź, 1985,

[59] Y. Muntyan, *Automata groups*, Doctoral dissertation, Texas A&M University, 2009,

[60] V. Nekrashevych, *Self-similar Groups*, Am. Math. Soc., Providence, RI, 2005, Math. Surv. Monogr. 117,

[61] V. Nekrashevych, *Free subgroups in groups acting on rooted trees*, Groups, Geometry, and Dynamics, 4 (4) (2010), 847–862,

[62] V. Nekrashevych, S. Sidki, *Automorphisms of the binary tree: state-closed subgroups and dynamics of 1/2-endomorphisms*, Groups: Topological, Combinatorial and Arithmetic Aspects, LMS Lecture Notes Series, 311 (2004), 375–404,

[63] P. Neumann, *Some questions of Edjvet and Pride about infinite groups*, Illinois Journal of Mathematics, 30 (1986), 301–316,

[64] G. A. Noskov, *Number of generators of a group*, Mathematical Notes, 33 (4) (1983), 249—254,

[65] A. S. Oliinyk, V. I. Sushchansky, *Free group of infinite unitriangular matrices*, Mathematical Notes, 67 (3) (2000), 320–324

[66] M. A. Pellegrini, *The* $(2,3)$*-generation of the special linear groups over finite fields*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 95 (1) (2017), 48–53,

[67] M. Quick, *Probabilistic generation of wreath products of non-Abelian finite simple groups, II*, International Journal of Algebra and Computation, 16 (3) (2006), 493—503,

[68] L. Ribes, P. Zalesskii, *Profinite Groups*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, v. 40, 2000,

[69] A. V. Rozhkov, *Theory of Aleshin type groups*, Mathematical Notes, 40 (5) (1986), 827–836,

[70] D. Segal, *The finite images of finitely generated groups*, Proceedings of the London Mathematical Society, 82 (3) (2001), 597–613,

[71] S. Sidki, *Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure, and acyclicity*, Journal of Mathematical Sciences, 100 (1) (2000), 1925–1943.

[72] P. Silva, B. Steinberg, *On a class of automata groups generalizing lamplighter groups*, International Journal of Algebra and Computation, 15 (5-6) (2005), 1213–1234,

[73] B. Steinberg, M. Vorobets, Ya. Vorobets, *Automata over a binary alphabet generating free groups of even rank*, International Journal of Algebra and Computation, 21 (1-2) (2011), 329–354,

[74] Z. Šunić, E. Ventura, *The conjugacy problem in automaton groups is not solvable*, Journal of Algebra, 364 (2012), 148–154,

[75] V. I. Sushchansky, *Periodic p-groups of permutations and the unrestricted Burnside problem*, Doklady Akademii Nauk SSSR, 247 (1979), 557–562.

[76] V. I. Sushchansky, *Wreath products and periodic factorable groups*, Mathematics of the USSR-Sbornik, 67 (2) (1990), 535–553,

[77] V. I. Sushchansky, *Normal Structure of Isometry Groups of Semifinite Baire Metrics. Infinite Groups and Related Algebraic Structures*, Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, Kiev (1993),

[78] V. I. Sushchansky, *Wreath products and factorizable groups*, Algebra i Analiz, 6 (1) (1994), 203-–238; St. Petersburg Mathematical Journal, 6 (1) (1995), 173-–198,

[79] M. Vorobets, Ya. Vorobets, *On a free group of transformations defined by an automaton*, Geometriae Dedicata, 124 (2007), 237–249.

[80] M. Vorobets, Ya. Vorobets, *On a series of finite automata defining free transformation groups*, Groups, Geometry, and Dynamics, 4 (2) (2010), 377-–405,

[81] J. S. Wilson, *On exponential growth and uniformly exponential growth for groups*, Inventiones mathematicae, 155 (2004), 287—303,

[82] J. S. Wilson, *Further groups that do not have uniformly exponential growth*, Journal of Algebra, 279 (2004), 292–301,

[83] C. M. Woodman, *The symmetry groups of non-rigid molecules as semi-direct products*, Molecular Physics, (6) 19 (1970), 753–780,

[84] A. Woryna, *On groups defined by diagonal and semi-diagonal automata*, Groups and actions: geometry and dynamics. International mathematical conference, December 19-22, 2016, Kiev, Taras Shevchenko National University of Kiev, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, National University of "Kiev-Mohyla Academy". Kiev: Taras Shevchenko National University of Kiev, 2016,

[85] A. Woryna, *Constructions of automata groups based on 1/2-homogeneous automorphisms*, Séminaire "Groupes et Géométrie", Université de Geneve, 21.03.2017, Organisateurs: Michelle Bucher-Karlsson, Rostislav Ivanovich Grigorchuk, Pierre de la Harpe, Anders Karlsson, Tatiana Smirnova-Nagnibeda.

Adam Woryna