Autoreferat

1. Imię i nazwisko Katarzyna Kuhlmann (poprzednie nazwisko Osiak)

2. Stopnie naukowe

- Magister matematyki, stopień uzyskany w lipcu 2001r. na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach. Tytuł pracy magisterskiej: *Reprezentacje grup małych rzędów.*
  Promotor: dr hab. Andrzej Sładek, prof. UŚ
- Doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki, stopień uzyskany we wrześniu 2005r. na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach. Tytuł pracy doktorskiej: *Przestrzenie porządków wyższych stopni.* Promotor: dr hab. Andrzej Sładek, prof. UŚ

3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu

- od 10. 2016r.: Uniwersytet Szczeciński, adiunkt,
- 2013–2014r.: University of Saskatchewan, Saskatoon, Kanada, wykładowca,
- 2008–2009r.: Ben Gurion University of the Negev, Beer Sheva, Izrael, staż podoktorski,
- 2008r. (6 tyg.): University of Saskatchewan, Saskatoon, Kanada, staż podoktorski,
- 2003–2016r.: Uniwersytet Śląski w Katowicach; adiunkt (asystent do 2005r.)
- 1995–1999r.: Instytut Medycyny Pracy i Zdrowia Środowiskowego w Sosnowcu, technik,
- 1994–1995r.: Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej w Katowicach, technik.

4. Wskazanie osiągnięcia naukowego

Tytuł rozprawy habilitacyjnej:

Przestrzenie $\mathbb{R}$-punktów

Prace wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej:

[1] K. Osiak, *The Boolean space of $\mathbb{R}$-places*, Rocky Mountain J. Math. **40** (2010), no. 6, 2003–2011

[2] I. Efrat, K. Osiak, *Topological spaces as spaces of $\mathbb{R}$-places*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), no. 5, 839–846

[3] F.-V. Kuhlmann, M. Machura, K. Osiak, *Metrizability of spaces of $\mathbb{R}$-places of function fields of transcendence degree 1 over real closed fields*, Comm. Algebra **39** (2011), no. 9, 3166–3177

[4] M. Machura, M. Marshall, K. Osiak, *Metrizability of the space of $\mathbb{R}$-places of a real function field*, Math. Z. **266** (2010), no. 1, 237–242

[5] F.-V. Kuhlmann, K. Kuhlmann, *Embedding theorems for spaces of $\mathbb{R}$-places of rational function fields and their products*, Fund. Math. **218** (2012), no. 2, 121–149

[6] K. Kuhlmann, *The structure of spaces of $\mathbb{R}$-places of rational function fields over real closed fields*, Rocky Mountain J. Math. **46** (2016), no. 2, 533–557

[7] P. Koprowski, K. Kuhlmann, *Places, cuts and orderings of function fields*, J. Algebra **468** (2016), 253–274.

A) Wprowadzenie i motywacja badań

Początki *algebry rzeczywistej* sięgają końca XIX wieku, kiedy to D. Hilbert sformułował swój słynny 17-ty problem w którym pytał, czy każdy wielomian $f \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$, przyjmujący tylko wartości nieujemne, jest sumą kwadratów rzeczywistych funkcji wymiernych. Pozytywnej odpowiedzi na to pytanie udzielili E. Artin oraz O. Schreier w 1927 roku w pracy [AS] zawierającej podstawy teorii ciał uporządkowanych.

Niech K będzie ciałem uporządkowanym, to znaczy ciałem z relacją porządku liniowego $<$ zgodną z działaniami dodawania i mnożenia przez elementy dodatnie. Zbiór elementów dodatnich P względem relacji $<$ jest addytywnie domkniętą podgrupą multiplikatywnej grupy $\dot{K}$ o indeksie $[\dot{K} : P] = 2$. Podgrupy grupy multiplikatywnej ciała K o powyższych własnościach są zbiorami elementów dodatnich relacji porządków liniowych określonych na K i zgodnych z działaniami. Nazywamy je *porządkami* ciała K.

Jedno z głównych twierdzeń teorii Artina-Schreiera mówi, że ciało K jest ciałem uporządkowanym wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciałem *formalnie rzeczywistym*, to znaczy -1 nie jest sumą kwadratów w K. Ciała formalnie rzeczywiste, które nie mają właściwych formalnie rzeczywistych rozszerzeń algebraicznych nazywamy *ciałami rzeczywiście domkniętymi.* Ciało rzeczywiście domknięte K ma dokładnie jeden porządek $P = \dot{K}^2$.

Krótko po opublikowaniu teorii Artina-Schreiera, R. Baer i W. Krull odkryli zależność między porządkami i waluacjami (zob. [B1], [B2] oraz [K]). Niech Γ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym i ∞ będzie elementem większym od wszystkich elementów zbioru Γ. *Waluacją* v grupy addytywnej K nazywamy odwzorowanie $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ o własnościach: $v(a) = \infty \iff a = 0$ oraz $v(a - b) \geqslant \min\{v(a), v(b)\}$ (używamy tutaj notacji Krulla). Jeśli dodatkowo Γ jest abelową grupą uporządkowaną i K jest ciałem oraz v jest homomorfizmem multiplikatywnej grupy $\dot{K}$, to otrzymujemy *waluację ciała* K. Wtedy zbiór $A_v = \{a \in K : v(a) \geqslant 0\}$ jest *pierścieniem waluacyjnym ciała* K z jedynym ideałem maksymalnym $I_v = \{a \in K : v(a) > 0\}$. Ciało $Kv = A_v/I_v$ nazywamy *ciałem reszt waluacji* v, a *grupę wartości* $v(\dot{K})$ waluacji v oznaczamy vK. Homomorfizm pierścieni $A_v \mapsto Kv$ można rozszerzyć do odwzorowania $\xi_v : K \to Kv \cup \{\infty\}$, przez przyporządkowanie wszystkim elementom nie należącym do A_v wartości ∞. Odwzorowanie ξ_v nazywamy *punktem wyznaczonym przez* v.

Waluację v ciała K nazywamy *rzeczywistą*, jeśli ciało Kv jest ciałem formalnie rzeczywistym. Wyznaczony przez taką waluację punkt nazywamy *punktem rzeczywistym.* Mówimy, że porządek P jest *zgodny z waluacją* v, jeśli A_v jest zbiorem wypukłym względem porządku P. W tym przypadku obraz zbioru $P \cap A_v$ w odwzorowaniu $A_v \to Kv$ jest porządkiem ciała Kv. W szczególności ciało Kv jest formalnie rzeczywiste. Słynne twierdzenie Baera-Krulla mówi, że jeśli v jest waluacją rzeczywistą, to każdy porządek $\bar{P}$ ciała Kv można "podnieść" do ciała K, to znaczy, istnieje porządek P ciała K, zgodny z v, który indukuje $\bar{P}$ na Kv. Ponadto, liczba porządków ciała K zgodnych z waluacją v oraz indukujących ten sam porządek na ciele reszt Kv jest równa rzędowi grupy $\mathrm{Hom}(vK/2vK, \{-1, 1\})$. Zbiór pierścieni waluacyjnych waluacji zgodnych z porządkiem P jest zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację inkluzji z elementem minimalnym $A(P)$ będącym otoczką wypukłą ciała liczb wymiernych (względem porządku P). Porządek P nazywamy *archimedesowym* jeśli $A(P) = K$. Waluację, której pierścieniem waluacyjnym jest $A(P)$, nazywamy *waluacją naturalną porządku* P. Porządek indukowany przez P na ciele reszt waluacji naturalnej porządku P jest porządkiem archimedesowym, zatem ciało reszt ma jednoznacznie wyznaczone rosnące zanurzenie w ciało liczb rzeczywistych. Złożenie punktu w ciało reszt z powyższym zanurzeniem daje punkt $K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zwany $\mathbb{R}$-*punktem.*

Przez $X(K)$ oznaczamy zbiór wszystkich porządków ciała K, a przez $M(K)$ zbiór wszystkich $\mathbb{R}$-punktów ciała K. Jak wspomnieliśmy wyżej, każdy porządek $P \in X(K)$ jednoznacznie wyznacza $\mathbb{R}$-punkt. Z twierdzenia Baera-Krulla wynika, że odwzorowanie

$$\lambda : X(K) \to M(K)$$

jest surjektywne. D. K. Harrison (wynik nieopublikowany), a później J. Leicht i F. Lorenz [LL] zauważyli wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy porządkami ciała K i ideałami pierwszymi pierścienia Witta $W(K)$ (złożonego z klas równoważności nieizotropowych form kwadratowych nad K). W ten sposób $X(K)$ staje się przestrzenią topologiczną z topologią indukowaną przez topologię Zariskiego na spektrum pierwszym pierścienia $W(K)$. Podbaza tej topologii może zostać wybrana jako rodzina *zbiorów Harrisona*

$$H(a) = \{P \in X(K) \colon a \in P\}, \ a \in K.$$

Przestrzeń $X(K)$ z topologią Harrisona jest przestrzenią boolowską (całkowicie niespójną, zwartą przestrzenią Hausdorffa). W 1975r. T. Craven [C] udowodnił, że każda przestrzeń boolowska X może być zrealizowana jako przestrzeń porządków pewnego ciała K.

Surjektywność odwzorowania λ pozwala nam rozważać topologię ilorazową na zbiorze $M(K)$. Przestrzeń $M(K)$ z tak określoną topologią jest przestrzenią zwartą. D. W. Dubois [D] udowodnił, że jest ona również przestrzenią Hausdorffa. W dowodzie użył własności *rzeczywistego pierścienia holomorficznego* $\mathcal{H}(K)$, zdefiniowanego jako przekrój wszystkich rzeczywistych pierścieni waluacyjnych ciała K. Rzeczywisty pierścień holomorficzny odgrywa ważną rolę w algebrze rzeczywistej i rzeczywistej geometrii algebraicznej. Elementy pierścienia $\mathcal{H}(K)$ rozdzielają punkty przestrzeni $M(K)$, to znaczy, dla dwóch różnych $\mathbb{R}$-punktów ξ_1 i ξ_2 istnieje $a \in \mathcal{H}(K)$ taki, że $\xi_1(a) > 0$ oraz $\xi_2(a) < 0$. Podbaza dla topologii przestrzeni $M(K)$ może zostać wybrana jako rodzina zbiorów

$$U(a) = \{\xi \in M(K) \colon \xi(a) > 0\}, \ a \in \mathcal{H}(K).$$

Niech $L|K$ będzie rozszerzeniem ciał. Jeśli P jest porządkiem ciała L, to $P \cap K$ jest porządkiem ciała K. Porządek P nazywamy P *przedłużeniem* porządku $P \cap K$, a funkcję res : $X(L) \to X(K)$, $\mathrm{res}(P) = P \cap K$, nazywamy *restrykcją*. M. Knebusch [Kn] zauważył, że obcięcie punktu $\lambda_L(P)$ do K pokrywa się z $\lambda_K(P \cap K)$. Co więcej, następujący diagram funkcji *ciągłych* jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} X(L) \arrow[r, "\lambda_L"] \arrow[d, "\mathrm{res}"] & M(L) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ X(K) \arrow[r, "\lambda_K"] & M(K) \end{tikzcd}$$

Problem realizowalności przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów został postawiony w niedługim czasie po publikacji wyniku Cravena. W dwóch pracach [BG] and [GM] zostały zebrane znane wyniki dotyczące tego zagadnienia, a sam problem został określony jako ciekawy i trudny. Do dziś nie znaleziono jego kompletnego rozwiązania. Wyniki niniejszej rozprawy dają częściowe rozwiązania tego problemu. Przedstawimy teraz pewne fakty teorii $\mathbb{R}$-punktów, znane już wcześniej.

Łatwo zauważyć, że jeśli K jest ciałem totalnie archimedesowym (tzn. wszystkie porządki ciała K są archimedesowe), to odwzorowanie λ jest homeomorfizmem, czyli $M(K)$ jest przestrzenią boolowską. W szczególności każda przestrzeń skończona jest realizowalna, ponieważ istnieją ciała totalnie archimedesowe z dowolną, skończoną liczbą porządków (zob. [E]).

W 1971r. R. Brown [Br] udowodnił, że jeśli F jest ciałem funkcji algebraicznych stopnia przestępnego 1 nad totalnie archimedesowym ciałem K o skończonej liczbie porządków, to $M(F)$ jest rozłączną sumą mnogościową skończonej liczby okręgów.

M. Knebusch w pracach [Kn1] oraz [Kn2] badał krzywe algebraiczne nad ciałami rzeczywiście domkniętymi. Niech X będzie gładką, nierozkładalną i zupełną krzywą algebraiczną nad rzeczywiście domkniętym ciałem K i niech F będzie ciałem funkcji wymiernych na X. Ciało F jest skończenie generowanym rozszerzeniem ciała K stopnia przestępnego 1. Niech γ będzie zbiorem punktów wymiernych na X, to znaczy punktów, które wyznaczają K-wymierne punkty ciała F (z wartościami w $K \cup \{\infty\}$ i trywialne na K). Złożenie punktu K-wymiernego z jedynym $\mathbb{R}$-punktem ciała K daje nam $\mathbb{R}$ punkt ciała F. Jeśli K jest ciałem archimedesowym, to punkty krzywej γ

odpowiadają dokładnie $\mathbb{R}$-punktom ciała F. Jeśli K nie jest ciałem archimedesowym, to punkty γ możemy widzieć jako podzbiór $M(F)$. Z twierdzenia ([P], Theorem 9.9]) wynika, że γ jest zbiorem gęstym w $M(F)$.

W przypadku wyższych wymiarów sytuacja jest bardziej skomplikowana. Przede wszystkim, ciało funkcyjne F stopnia przestępnego co najmniej 2 nad K ma wiele gładkich modeli rzutowych. Związek pomiędzy przestrzenią $M(F)$ i różnymi modelami ciała F został opisany w pracy [Sch] H.-W. Schültinga. Udowodnił on, że jeśli F jest ciałem funkcyjnym nad rzeczywiście domkniętym ciałem K, to przestrzeń $M(F)$ jest homeomorficzna z granicą odwrotną jego modeli gładkich. Rozważmy zupełną i gładką $\mathbb{R}$-rozmaitość algebraiczną V z formalnie rzeczywistym ciałem funkcji wymiernych F. Niech V_r będzie zbiorem punktów rzeczywistych rozmaitości V z euklidesową topologią dziedziczoną z $\mathbb{R}^n$. L. Bröcker udowodnił (wynik nieopublikowany), że liczba składowych spójnych przestrzeni $M(F)$ jest równa liczbie składowych semialgebraicznie spójnych przestrzeni V_r co oznacza, że ta ostatnia jest biwymiernym niezmiennikiem dla gładkich i zupełnych $\mathbb{R}$-rozmaitości.

Wynik Bröckera nie jest prawdziwy dla ciał funkcyjnych nad niearchimedesowym ciałem rzeczywiście domkniętym K. H.-W. Schülting ([Sch]) podał przykład K-rozmaitości o dwóch semialgebraicznych składowych spójnych, dla której przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów ciała funkcji wymiernych jest spójna. Stopień przestępny nad K ciała z kontrprzykładu Schültinga wynosi 2, można jednak skonstruować kontrprzykład dla ciała funkcji wymiernych na krzywej. Przykład Schültinga odpowiada na pytanie postawione przez R. Browna w pracy [Br].

Dla dowolnego formalnie rzeczywistego ciała K, składowe spójne przestrzeni $M(K)$ były badane również w pracach J. Harmana ([H]) oraz E. Beckera ([Be2]). W badaniach tych użyto opracowanej przez Beckera teorii porządków wyższych stopni. J. Harman udowodnił, że jeśli przestrzeń $M(K)$ jest spójna, to przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów ciała funkcji wymiernych nad K jest również spójna. Ostatnio R. Brown i J. Merzel ([BM]) udowodnili, że przestrzeń $M(\mathbb{R}(x,y))$ jest nie tylko spójna (co wynika z obserwacji Harmana), lecz również łukowo spójna.

W wyznaczeniu liczby składowych spójnych przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów ciała K ważną rolę odgrywa zbiór elementów odwracalnych $\mathbb{E}(K)$ pierścienia holomorficznego ciała K. Składowe spójne przestrzeni $M(K)$ mogą być oddzielane przez elementy $\mathbb{E}(K)$, tzn. dla każdej składowej spójnej π przestrzeni $M(K)$ istnieje $a \in \mathbb{E}(K)$ takie, że $\pi \subset U(a)$ i $M(K) \setminus \pi \subset U(-a)$. Niech $\mathbb{E}^+(K)$ będzie zbiorem totalnie dodatnich elementów $\mathbb{E}(K)$ (tzn. dodatnich w każdym porządku ciała K). Zbiory $\mathbb{E}(K)$ i $\mathbb{E}^+(K)$ są podgrupami grupy multiplikatywnej $\dot{K}$. Becker udowodnił w pracy [Be2], że liczba składowych spójnych przestrzeni $M(K)$ jest równa liczbie $\log_2[\mathbb{E}(K) : \mathbb{E}^+(K)]$. Może być ona również wyrażona za pomocą odpowiednich indeksów grup będących sumami 2^n-tych potęg w ciele K (zob. [BG]).

Rzeczywisty pierścień holomorficzny ciała K pozwala uzyskać dodatkowe informacje o przestrzeni $M(K)$. Element $a \in \mathcal{H}(K)$ wyznacza ciągłą funkcję rzeczywistą na $M(K)$ zdefiniowaną przez przyporządkowanie $\xi \mapsto \xi(a)$ dla $\xi \in M(K)$. Niech $S^n(\mathcal{H}(K)) = \{(a_0, ..., a_n) \in \mathcal{H}(K)^{n+1} \colon a_0^2 + ... + a_n^2 = 1\}$. Każdy ciąg $a = (a_0, ..., a_n) \in S^n(\mathcal{H}(K))$ wyznacza ciągłą funkcję $\hat{a} : M(K) \to S^n$, gdzie S^n jest sferą n-wymiarową, daną wzorem $\hat{a}(\xi) = (\xi(a_0), ..., \xi(a_n))$. Możemy zatem zanurzyć $S^n(\mathcal{H}(K))$ w przestrzeń funkcji ciągłych $C(M(K), S^n)$. Becker wykazał w swojej (nieopublikowanej jeszcze) monografii [Be3], że gęstość obrazu $S^n(\mathcal{H}(K))$ w $C(M(K), S^n)$ jest równoważna algebraicznej własności mówiącej, że każdy element grupy $\mathbb{E}^+(K)$, który jest sumą n kwadratów, można przedstawić jako sumę n kwadratów elementów z $\mathbb{E}^+(K)$. Aby sprawdzić czy warunek gęstości zachodzi, musimy znać strukturę przestrzeni $M(K)$.

W kolejnym rozdziale zobaczymy, że pewne własności przestrzeni $M(K)$ można wyprowadzić z własności przestrzeni porządków $X(K)$. Będziemy potrzebować następujących elementarnych pojęć i własności. *Przekrojem* w zbiorze uporządkowanym X nazywamy parę (D, E) taką, że $D \cup E = X$ i $D < E$, co oznacza, że $d < e$ dla każdego $d \in D$ i $e \in E$. Zbiór D nazywamy *klasą dolną*, a E *klasą górną* przekroju. Przekroje $(\emptyset, X)$ i $(X, \emptyset)$ nazywamy *niewłaściwymi*, wszystkie pozostałe nazywamy *przekrojami Dedekinda*. Jeśli D ma element największy lub E ma element najmniejszy, to przekrój (D, E) nazywamy *głównym*. Przekroje główne oznaczamy symbolami a^- lub a^+, jeśli odpowiednio a jest elementem najmniejszym klasy górnej lub największym klasy dolnej. Przez $\mathcal{C}(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich przekrojów w X. R. Gilmer [G] wykazał, że jeśli K jest ciałem rzeczywiście domkniętym, to porządki ciała funkcji wymiernych $K(x)$ odpowiadają wzajemnie jednoznacznie przekrojom w K.

Skoro ciało $\mathbb{R}$ jest zupełne, każdy przekrój Dedekinda w $\mathbb{R}$ jest główny. Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ porządki odpowiadające przekrojom głównym a^- i a^+ wyznaczają ten sam pierścień waluacyjny z ciałem reszt $\mathbb{R}$, zatem indukują ten sam $\mathbb{R}$-punkt ξ_a. Otrzymujemy więc bijekcję między elementami $a \in \mathbb{R}$ i punktami ξ_a ciała $\mathbb{R}(x)$. Przekroje niewłaściwe również wyznaczają ten sam $\mathbb{R}$-punkt ξ_∞. Możemy więc identyfikować $\mathbb{R}$-punkty ciała $\mathbb{R}(x)$ z elementami zbioru $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, czyli topologicznego okręgu.

Sytuacja w przypadku niearchimedesowego ciała K jest bardziej skomplikowana. Aby zrozumieć jak wtedy działa na przekrojach odwzorowanie $\lambda : X(K) \to M(K)$, będziemy potrzebować pojęcia ultrametryki. Niech X będzie dowolnym zbiorem i niech Γ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym oraz ∞ elementem większym od wszystkich elementów zbioru Γ. Odwzorowanie $u : X \times X \to \Gamma \cup \{\infty\}$ nazywamy *ultrametryką na* X, jeśli: (i) $u(x, y) = \infty \Leftrightarrow x = y$, (ii) $u(x, y) = u(y, x)$, (iii) $u(x, y) \geqslant \min\{u(x, z), u(z, y)\}$, dla dowolnych $x, y, z \in X$. Zauważmy, że waluacja v grupy abelowej lub ciała K wyznacza ultrametrykę na K, gdzie $u(a, b) = v(a-b)$, dla $a, b \in K$. Mając ultrametrykę u na zbiorze X definiujemy w naturalny sposób *kule ultrametryczne*. Niech S będzie klasą górną przekroju w Γ. *Kulą ultrametryczną* o środku w $x \in X$ i promieniu S nazywamy zbiór

$$B_S(x) = \{y \in X \colon u(x, y) \in S \cup \{\infty\}\}.$$

Zauważmy, że dla $x \in X$ zarówno $X = B_\Gamma(x)$ jak i $\{x\} = B_\emptyset(x)$ są kulami ultrametrycznymi. Dla $s \in \Gamma$ symbolem $B_{s^-}(x)$ oznaczamy kulę $B_S(x)$, gdzie $S = \{t \mid t \geqslant s\}$ jest klasą górną przekroju s^-, natomiast symbolem $B_{s^+}(x)$ oznaczamy kulą wyznaczoną przez klasę górną $S = \{t \mid t > s\}$ przekroju s^+.

Jeśli ultrametryka wyznaczona jest przez waluację naturalną grupy uporządkowanej K, to kule ultrametryczne są warstwami wypukłych podgrup K. Kule ultrametryczne mają dwie ważne własności:

- każdy punkt x kuli ultrametrycznej jest jej środkiem, tzn. jeśli $y \in B_S(x)$, to $B_S(x) = B_S(y)$,
- jeśli kule ultrametryczne B_1 i B_2 nie są rozłączne, to jedna z nich zawiera się w drugiej.

B) Opis głównych wyników rozprawy habilitacyjnej

Ogólnym celem mojej pracy było otrzymanie dodatkowych klas przestrzeni realizowalnych jako przestrzenie $\mathbb{R}$-punktów oraz zbadanie ich własności.

Artykuł [1]

W pracy tej rozważamy realizowalność przestrzeni boolowskich jako przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów. Ponieważ wszystkie przestrzenie skończone są realizowalne, rozważamy tylko nieskończone przestrzenie boolowskie. Każda przestrzeń boolowska jest domkniętym podzbiorem pewnej kostki Cantora $D_\mathfrak{m}$ wagi $\mathfrak{m}$. Pierwszym ważnym wynikiem pracy jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1 [1, Theorem 3.2] *Dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej* $\mathfrak{m}$*, kostka Cantora* $D_\mathfrak{m}$ *wagi* $\mathfrak{m}$ *jest homeomorficzna z przestrzenią* $M(K)$ *dla pewnego ciała* K.

Konstrukcja ciała K wygląda następująco. Niech R będzie ciałem rzeczywiście domkniętym mocy $\mathfrak{m}$ i niech $R(x)$ będzie ciałem funkcji wymiernych nad R. Definiujemy

$$K = R(x)\left(\left\{\sqrt{\frac{x-a}{x}} \ : \ a \in R\right\}\right).$$

W pracy [10] wykazaliśmy, że przestrzeń porządków ciała K jest sumą rozłączną dwóch zbiorów Harrisona: $H(x)$ and $H(-x)$, a każdy z nich jest homeomorficzny z $D_{\mathfrak{m}}$. Pierwszy zbiór zawiera tylko przedłużenia porządku P_∞ odpowiadającemu niewłaściwemu przekrojowi $(R, \emptyset)$ ciała R, a drugi zbiór zawiera tylko przedłużenia porządku $P_{-\infty}$ odpowiadającemu niewłaściwemu przekrojowi $(\emptyset, R)$. Wszystkie elementy postaci $\frac{x-a}{x}$ są odwracalne w pierścieniu waluacyjnym $A(P_\infty) = A(P_{-\infty})$. Do zakończenia dowodu wykorzystujemy poniższy lemat.

Lemat 2 [1, Lemma 3.1] *Niech P będzie porządkiem ciała F i niech $L = F(\{\sqrt{a} : a \in \mathcal{A}\})$, gdzie $\mathcal{A} \subset \{a \in F : 0 < \lambda_F(P)(a) < \infty\}$. Wtedy odwzorowanie λ_L obcięte do zbioru $\mathrm{res}^{-1}(P)$ jest injekcją.*

T. Craven wykazał w pracy [Cr], że każde skończone rozszerzenie algebraiczne K ciała $R(x)$ spełnia silny warunek aproksymacyjny (mówiący o tym, że dwa rozłączne, domknięte podzbiory przestrzeni $X(K)$ można rozdzielić zbiorami Harrisona). Warunek ten jest równoważny własności, że podbaza Harrisona jest bazą przestrzeni $X(K)$. Zatem każdy domknięty podzbiór Y przestrzeni $X(K)$ można zapisać w postaci $Y = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} H(\alpha)$ dla pewnego $\mathcal{A} \subset K$. Niech $L = K(\{ \sqrt[2^n]{\alpha} : \alpha \in \mathcal{A}, n = 1, 2, ...\})$. Craven pokazał, że odwzorowanie $\mathrm{res} : X(L) \longrightarrow X(K)$ jest homeomorfizmem na Y. Aby otrzymać homeomorfizm przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów, musimy właściwie wybrać zbiór $\mathcal{A}$.

Stwierdzenie 3 [1, Proposition 4.2] *Niech K będzie ciałem formalnie rzeczywistym. Przypuśćmy, że Y_1 jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $X(K)$ takim, że $\lambda_K|_{Y_1}$ jest bijekcją na $M(K)$, a Y_2 jest domkniętym podzbiorem $X(K)$ takim, że $Y_2 = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} H(\alpha)$, gdzie $\mathcal{A} \subset \mathbb{E}(K)$. Niech $Y_0 = Y_1 \cap Y_2$ i niech $L = K(\{ \sqrt[2^n]{\alpha} : \alpha \in \mathcal{A}, n = 1, 2, ...\})$. Wtedy odwzorowanie λ_L obcięte do zbioru $\mathrm{res}^{-1}(Y_0)$ jest homeomorfizmem na $M(L)$.*

Wybór $\mathcal{A}$ jako podzbioru $\mathbb{E}(K)$ daje nam $Y_0 \neq \emptyset$ oraz pozwala skonstruować poprawnie określoną funkcję $\pi : Y_2 \to Y_0$, która każdemu porządkowi $P \in Y_2$ przyporządkowuje jedyny porządek $Q \in Y_0$ taki, że $\lambda_K(P) = \lambda_K(Q)$. Mamy przemienny diagram odwzorowań ciągłych

$$\begin{tikzcd}
X(L) \arrow[rr, "\lambda_L"] \arrow[ddd, "\mathrm{res}"'] & & M(L) \arrow[ddd, "\mathrm{res}"] \\
& \mathrm{res}^{-1}(Y_0) \arrow[ul, "id"'] \arrow[ur, "\lambda_L"] \arrow[d, "\mathrm{res}"] & \\
& Y_0 \arrow[dr, "\lambda_K"] & \\
Y_2 \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\lambda_K"] & & M(K)
\end{tikzcd}$$

gdzie lewe i środkowe odwzorowania pionowe są bijekcjami, a λ_K jest różnowartościowe na Y_0. Wykorzystując przemienność diagramu otrzymujemy bijektywność odwzorowania λ_L na $\mathrm{res}^{-1}(Y_0)$.

Niech K będzie ciałem skonstruowanym w dowodzie Twierdzenia 1. Zbiór Harrisona $H(x) \subset X(K)$ jest homeomorficzny z kostką Cantora $D_{\mathfrak{m}}$. Używając Kryterium Separacyjnego [L, Proposition 9.13], dowodzimy, że każdy podzbiór domknięty $Y_0 \subset H(x)$ można zapisać w postaci $Y_0 = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} H(\alpha)$, gdzie $\mathcal{A} \subset \mathbb{E}(K)$. Przyjmując $Y_1 = H(x)$ i $Y_2 = Y_0$ w Stwierdzeniu 3 otrzymujemy główny wynik pracy [**1**]:

Twierdzenie 4 [1, Theorem 4.4] *Każda przestrzeń boolowska jest realizowalna jako przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów pewnego ciała L.*

Artykuł [2]

W pracy tej badamy, które klasy zwartych przestrzeni Hausdorffa mogą być zrealizowane jako przestrzenie $\mathbb{R}$-punktów. Dowodzimy, że rodzina realizowalnych przestrzeni topologicznych jest domknięta ze względu na trzy topologiczne operacje:

- skończone sumy rozłączne;
- domknięte podprzestrzenie;
- produkty z przestrzeniami boolowskimi.

W pracy używamy pojęcia „localities" wprowadzonego przez I. Efrata, ale tutaj przedstawimy poszczególne konstrukcje używając klasycznego języka teorii ciał uporządkowanych i waluacji. Najpierw zobaczymy, jak można powiększać ciała nie zmieniając ich przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów.

Stwierdzenie 5 [2, Proposition 4.1] *Dla każdego ciała K i liczby kardynalnej α istnieje rozszerzenie F ciała K takie, że* $\operatorname{trdeg} F|K = \alpha$ *oraz* $\operatorname{res}\colon M(F) \to M(K)$ *jest homeomorfizmem.*

Ciało skonstruowane w dowodzie powyższego stwierdzenia jest relatywnym algebraicznym domknięciem ciała $K(\mathbb{Z}^\alpha)$ w ciele szeregów formalnych $K((\mathbb{Z}^\alpha))$.

Ustalmy skończony zbiór $M(F_1), ..., M(F_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów. Na mocy Stwierdzenia 5 możemy założyć, że wszystkie ciała $F_1, ..., F_n$ mają ten sam stopień przestępny nad $\mathbb{Q}$. Ustalając bazę przestępną możemy założyć, że ciała $F_1, ..., F_n$ są algebraicznymi rozszerzeniami ciała $\mathbb{Q}(T)$ dla pewnego zbioru T elementów algebraicznie niezależnych. Dla każdego $i = 1, ..., n$, ciało szeregów formalnych $F_i((x+i))$ z kanoniczną dyskretną waluacją v_i jest ciałem henselowskim z ciałem reszt F_i. Niech K_i będzie relatywnym domknięciem algebraicznym ciała $F_i(x)$ w $F_i((x+i))$. Z [2, Corollary 3.8] otrzymujemy:

$$M(K_i) \cong M(F_i)\,. \tag{1}$$

Rozszerzenie $(F_i(x), v_i) \subset (K_i, v_i) \subset (F_i((x+i)), v_i)$ jest *bezpośrednie* (co oznacza, że wszystkie waluacje mają tę samą grupę wartości i ciało reszt). Rozważmy ciało $F = \bigcap_{i=1}^n K_i$ oraz waluacje v_i, $i = 1, ..., n$, na ciele F będące obcięciami waluacji ciał K_i. Zbiór porządków ciała F zgodnych z waluacją v_i oznaczmy $X(F, v_i)$, a zbiór odpowiadających im $\mathbb{R}$-punktów przez $M(F, v_i)$.

Stwierdzenie 6 [2, Proposition 4.2] *Niech $v_1, ..., v_n$ będą różnymi waluacjami rangi 1 ciała F. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ niech (K_i, v_i) będzie bezpośrednim, henselowskim rozszerzeniem ciała (F, v_i) i załóżmy, że $F = \bigcap_{i=1}^n K_i$. Wtedy:*

(a) $X(F) = \dot\bigcup_{i=1}^n X(F, v_i)$;

(b) $M(F) = \dot\bigcup_{i=1}^n M(F, v_i)$;

(c) $\operatorname{res}\colon \dot\bigcup_{i=1}^n X(K_i) \to X(F)$ *jest homeomorfizmem;*

(d) $\operatorname{res}\colon \dot\bigcup_{i=1}^n M(K_i) \to M(F)$ *jest homeomorfizmem.*

Wykorzystując powyższe stwierdzenie oraz 1 otrzymujemy pierwszy ważny wynik pracy [2]:

Twierdzenie 7 [2, Theorem 4.3] *Niech $F_1, ..., F_n$ będą ciałami formalnie rzeczywistymi. Istnieje ciało F takie, że*

$$M(F) \cong \dot\bigcup_{i=1}^n M(F_i).$$

Drugim głównym wynikiem pracy [2] jest poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 8 [2, Theorem 5.4] *Niech Y będzie domkniętym podzbiorem $M(K)$. Istnieje algebraiczne rozszerzenie F ciała K takie, że*

(a) $\operatorname{res}\colon X(F) \to X(K)$ *odwzorowuje $X(F)$ wzajemnie jednoznacznie na $\lambda_K^{-1}(Y)$;*

(b) $\operatorname{res}\colon M(F) \to M(K)$ *odwzorowuje $M(F)$ wzajemnie jednoznacznie na Y.*

Konstrukcja ciała F wygląda następująco. Ustalmy domknięty podzbiór Y przestrzeni $M(K)$. Stosując Kryterium Separacyjne, wybieramy dla każdego porządku P takiego, że $\lambda_K(P) \notin Y$ element $a_P \in \mathcal{H}(K)$ taki, że $\lambda_K^{-1}(Y) \subset H(a_P)$ i a_P jest elementem odwracalnym w pierścieniu waluacyjnym każdego porządku ze zbioru $\lambda_K^{-1}(Y) \cup \{P\}$. Stąd otrzymujemy, że $\lambda_K^{-1}(Y) = \bigcap_{P \notin \lambda_K^{-1}(Y)} H(a_P)$. Definiujemy F jako złożenie ciał $K(\{\sqrt[2^n]{a_P} : n = 1, 2, ...\})$. Z wyniku Cravena otrzymujemy, że odwzorowanie res: $X(F) \to X(K)$ jest bijekcją na $\lambda_K^{-1}(Y)$. Stąd wynika, że zbiorem wartości odwzorowania res: $M(F) \to M(K)$ jest Y. Do wykazania injektywności restrykcji wykorzystujemy poniższy lemat.

Lemat 9 [2, Lemma 5.2] *Niech $a \in \mathcal{H}(K)$ i niech $F_a = K(\{\sqrt[2^n]{a} : n = 1, 2, ...\})$. Wtedy odwzorowanie* res: $M(F_a) \to M(K)$ *jest różnowartościowe na zbiorze $U(a)$.*

Stąd otrzymujemy, że odwzorowanie res: $M(F_{a_1,...,a_k}) \to M(K)$, gdzie $F_{a_1,...,a_k}$ jest złożeniem ciał F_{a_i} dla $a_1, ..., a_k \in \mathcal{H}(K)$, jest różnowartościowe na $U(a_1) \cap \ldots \cap U(a_k)$. Skoro F jest granicą prostą takich ciał, injektywność odwzorowania res: $M(F) \to M(K)$ wynika z poniższego lematu.

Lemat 10 [2, Lemma 3.6] *Niech F_i, $i \in I$, będzie systemem prostym ciał z relacją inkluzji i niech $F = \varinjlim F_i$. Wtedy odwzorowanie $\varprojlim \colon M(F) \to \varprojlim M(F_i)$ jest homeomorfizmem.*

Oczywistym wnioskiem z Twierdzenia 8 jest:

Wniosek 11 [2, Corollary 5.5] *Jeśli przestrzeń topologiczna M jest realizowalna jako przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów, wtedy każda domknięta podprzestrzeń M też jest realizowalna.*

Ostatnia konstrukcja, tzn. produkt z przestrzenią boolowską, jest kombinacją dwóch poprzednich. Mając realizowalną przestrzeń $M = M(K)$, dla pewnego ciała K, możemy wpierw użyć pierwszej konstrukcji, aby otrzymać ciało K_n, którego przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów jest sumą rozłączną 2^n kopii przestrzeni M. Następnie, używając indukcji pozaskończonej, dowodzimy:

Stwierdzenie 12 [2, Proposition 6.1] *Niech K będzie ciałem i niech α będzie zbiorem. Istnieje rozszerzenie ciał $K_\alpha|K$ oraz homeomorfizm $\tau_\alpha \colon M(K_\alpha) \xrightarrow{\sim} \{0,1\}^\alpha \times M(K)$ taki, że poniższy diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd} M(K_\alpha) \arrow[r, "\tau_\alpha", "\sim"'] \arrow[dr, "\mathrm{res}"'] & \{0,1\}^\alpha \times M(K) \arrow[d, "\mathrm{proj}"] \\ & M(K). \end{tikzcd}$$

Z Wniosku 11 otrzymujemy:

Wniosek 13 [2, Corollary 6.2] *Niech K będzie ciałem i X przestrzenią boolowską. Istnieje rozszerzenie F ciała K takie, że $M(F)$ is homeomorficzna z $X \times M(K)$.*

Ten wynik uogólnia Twierdzenie 4 (jeśli weźmiemy ciało K z jedynym $\mathbb{R}$-punktem, na przykład dowolne ciało rzeczywiście domknięte).

Artykuł [3]

W tej pracy badamy przestrzenie $\mathbb{R}$-punktów ciała funkcji wymiernych $R(x)$ nad dowolnym (również niearchimedesowym) rzeczywiście domkniętym ciałem R. Główne twierdzenie pracy mówi:

Twierdzenie 14 [3, Theorem 4.7] *Niech R będzie ciałem rzeczywiście domkniętym. Przestrzeń $M(R(x))$ jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy R zawiera przeliczalne podciało gęste.*

Jak wspomnieliśmy we Wprowadzeniu, porządki ciała $R(x)$ odpowiadają wzajemnie jednoznacznie przekrojom w R. Zbiór $\mathcal{C}(R)$ przekrojów w R jest zbiorem liniowo uporządkowanym, możemy więc rozważać na $\mathcal{C}(R)$ topologię porządkową. W pracy **[3]** pokazaliśmy, że bijekcja pomiędzy $X(R(x))$ i $\mathcal{C}(R)$ jest homeomorfizmem (Twierdzenie 2.1).

Kolejnym krokiem było wyznaczenie, które porządki (a zatem odpowiadające im przekroje) wyznaczają ten sam $\mathbb{R}$-punkt. Używamy w tym celu ultrametryki u na R indukowanej przez waluację naturalną v ciała R. Grupa vR jest podzielną, uporządkowaną grupą abelową, która dla niearchimedesowego ciała R nie jest trywialna. Każda kula ultrametryczna B wyznacza dwa przekroje w R: B^- z klasą dolną $\{a \in R\colon a < B\}$ i B^+ z klasą górną $\{a \in R\colon a > B\}$. Przekroje B^- i B^+ nazywamy *przekrojami wyznaczonymi przez kulę.*

Twierdzenie 15 [3, Theorem 2.2] *Niech R będzie ciałem rzeczywiście domkniętym i niech P_1, P_2 będą porządkami ciała $R(x)$. Mamy $\lambda(P_1) = \lambda(P_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy przekroje odpowiadające P_1 i P_2 są wyznaczone przez tę samą kulę ultrametryczną B w R.*

Analizując przekroje w ciałach rzeczywiście domkniętych i korzystając z Twierdzenia 15, otrzymujemy:

Twierdzenie 16 [3, Theorem 3.2] *Niech $R' \subset R$ będzie rozszerzeniem ciał rzeczywiście domkniętych. Ciało R' jest gęste w R wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie* $\mathrm{res} : M(R(x)) \to M(R'(x))$ *jest homeomorfizmem.*

Z Twierdzenia Metryzacyjnego Urysona, zwarta przestrzeń Hausdorffa jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia drugi aksjomat przeliczalności. Każda przestrzeń spełniająca drugi aksjomat przeliczalności jest ośrodkowa. Celularność przestrzeni topologicznej M jest zdefiniowana jako

$$\sup\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ jest rodziną parami rozłącznych otwartych podzbiorów } M\}.$$

Celularność jest nie większa niż gęstość przestrzeni M. Zatem, jeśli celularność jest nieprzeliczalna, to gęstość też i stąd przestrzeń nie jest ośrodkowa, a zatem nie jest metryzowalna.

Przypomnijmy, że podbazę przestrzeni $M(K)$ można wybrać jako rodzinę zbiorów indeksowaną elementami pierścienia holomorficznego ciała K. Jeśli K jest ciałem przeliczalnym, to podbaza (a zatem również baza) przestrzeni $M(K)$ jest przeliczalna i stąd $M(K)$ spełnia drugi aksjomat przeliczalności, zatem otrzymujemy:

Wniosek 17 [3, Corollary 4.1] *Jeśli K jest ciałem przeliczalnym, to $M(K)$ jest przestrzenią metryzowalną.*

Z powyższego wniosku i Twierdzenia 16 otrzymujemy warunek wystarczający Twierdzenia 14. Do dowodu warunku koniecznego wykorzystujemy poniższe stwierdzenie.

Stwierdzenie 18 [3, Proposition 4.3] *Przypuśćmy, że vR i Rv są przeliczalne i $M(R(x))$ jest metryzowalna. Wtedy R zawiera podciało przeliczalne i gęste.*

Widzimy więc, że jeśli R nie zawiera przeliczalnego podciała gęstego i vR oraz Rv są przeliczalne, to $M(R(x))$ nie może być metryzowalna. Chcemy wykazać niemetryzowalność również w przypadku, gdy vR oraz Rv są nieprzeliczalne. Aby zilustrować ideę dowodu rozważmy przypadek, gdy Rv jest ciałem nieprzeliczalnym. Ciało Rv możemy zanurzyć rosnąco w R. Dla dowolnego $a \in R$ i $s \in vR$ definiujemy

$$U_{a,s}\colon = \{\xi \in M(R(x))\colon v_\xi(x - a) > s\},$$

gdzie v_ξ jest waluacją ciała $R(x)$ odpowiadającą ξ. W **[3, Lemma 4.4]** pokazujemy, że zbiór $U_{a,s}$ jest niepusty i otwarty w $M(R(x))$. Ustalmy $b \in R$ takie, że $t = v(b) > s$. Wtedy zbiory $U_{a+kb,t}$, gdzie $k \in Rv$, są parami rozłącznymi, otwartymi podzbiorami $U_{a,s}$, co pokazuje, że celularność $M(R(x))$ jest nieprzeliczalna.

Używając podobnych konstrukcji w pozostałych dwóch przypadkach, gdy vR jest nieprzeliczalna i gdy oba zbiory vR and Rv są przeliczalne, dowodzimy:

Twierdzenie 19 [**3, Theorem 4.5**] *Niech R będzie ciałem rzeczywiście domkniętym, które nie zawiera przeliczalnego podciała gęstego. Ustalmy $a \in R$ i $s \in vR$. Wtedy $U_{a,s}$ zawiera nieskończenie wiele parami rozłącznych zbiorów otwartych. W szczególności, $M(R(x))$ ma nieprzeliczalną celularność i nie jest metryzowalna.*

Otrzymujemy w ten sposób kompletny dowód Twierdzenia 14. W pracy przedstawiamy również przykład pokazujący, że przeliczalność vR oraz Rv nie są wystarczające dla metryzowalności $M(R(x))$.

Przykład 20 [**3, Example 4.8**] *Niech k będzie przeliczalnym archimedesowym ciałem rzeczywiście domkniętym i niech Γ będzie przeliczalną, nietrywialną podzielną grupą abelową uporządkowaną. Ciało $R = k((\Gamma))$ jest ciałem rzeczywiście domkniętym, grupą wartości naturalnej waluacji ciała R jest Γ, a ciałem reszt jest k. Przestrzeń $M(R(x))$ ma nieprzeliczalną celularność, zatem nie jest metryzowalna.*

Dla ciał funkcyjnych stopnia przestępnego 1 nad ciałem rzeczywiście domkniętym, otrzymujemy implikację tylko w jedna stronę.

Twierdzenie 21 [**3, Theorem 4.9**] *Niech R będzie ciałem rzeczywiście domkniętym, które nie posiada podciała przeliczalnego i gęstego. Niech F będzie formalnie rzeczywistym ciałem funkcyjnym stopnia przestępnego 1 nad R. Wtedy $M(F)$ nie jest metryzowalna.*

Artykuł [4]

Struktura przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów ciała funkcyjnego F stopnia przestępnego większego niż 1 jest dużo bardziej skomplikowana, nawet wtedy, jeśli rozważać będziemy ciała funkcyjne nad ciałem liczb rzeczywistych. Głównym wynikiem pracy [4] jest poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 22 [**4, Theorem 1.1**] *Dla nieprzeliczalnego ciała rzeczywiście domkniętego R, przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów ciała funkcji wymiernych $R(x,y)$ nie jest metryzowalna.*

Przedstawię teraz szkic dowodu. Zbiór $Y = H(x) \cap \bigcap_{r \in \dot{R}^2} H(r-x)$ jest domknięty w $X(R(x,y))$. Dla dowolnego $r \in R$, zbiór $U_r = Y \cap \bigcup_{a \in \mathbb{N}} [H(ax - (y-r)) \cap H(ax + (y-r))]$ jest otwarty w Y. Ponadto zbiory U_r są niepuste, parami rozłączne i *pełne*, co oznacza, że $\lambda^{-1}(\lambda(U_r)) = U_r$. Wtedy zbiory $V_r = \lambda(U_r)$ są niepuste, otwarte i parami rozłączne w $N = \lambda(Y)$, a zatem celularność N jest nie mniejsza niż $|R|$. Wynika stąd, że zarówno N jak i $M(R(x,y))$ nie są metryzowalne.

W dowodzie Twierdzenia 22 korzystamy tylko z tego, że $x, y \in F$, $R \subseteq F$ i $U_r \neq \emptyset$ dla nieprzeliczalnie wielu $r \in R$. Dzięki tej obserwacji możemy przestawić kilka uogólnień.

Twierdzenie 23 [**4, Theorem 3.1**] *Przypuśćmy, że $R(x,y) \subseteq F \subseteq R'((x,y))$, gdzie R jest nieprzeliczalnym ciałem rzeczywiście domkniętym, R' jest rzeczywiście domkniętym rozszerzeniem R i $R'((x,y))$ jest ciałem szeregów formalnych dwóch zmiennych nad R'. Wtedy $M(F)$ nie jest metryzowalna.*

Stąd natychmiast otrzymujemy:

Wniosek 24 [**4, Corollary 3.2**] *Dla nieprzeliczalnego ciała rzeczywiście domkniętego R, przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów ciała szeregów formalnych $R((x,y))$ nie jest metryzowalna.*

Niech F będzie ciałem funkcyjnym nad R stopnia przestępnego $d \geqslant 2$. Rozważając F jako ciało funkcji wymiernych na pewnej algebraicznej rozmaitości V i uzupełniając pierścień współrzędnych w pewnym ustalonym rzeczywistym punkcie regularnym otrzymujemy $F \subseteq R((x_1, \ldots, x_d))$, dla pewnych elementów $x_1, \ldots, x_d$ pierścienia współrzędnych. Stosując Twierdzenie 23 dla $x = x_1, y = x_2$ i R' jako rzeczywistego domknięcia ciała $R((x_3, \ldots, x_d))$ względem wybranego porządku otrzymujemy:

Wniosek 25 **[4, Corollary 3.3]** *Przypuśćmy, że R jest nieprzeliczalnym ciałem rzeczywiście domkniętym i F skończenie generowanym, formalnie rzeczywistym rozszerzeniem ciała R stopnia przestępnego $\geqslant 2$. Wtedy $M(F)$ nie jest metryzowalna.*

Dla archimedesowego ciała rzeczywiście domkniętego R otrzymujemy:

Wniosek 26 **[4, Corollary 3.4]** *Niech R będzie archimedesowym ciałem rzeczywiście domkniętym, a F jego skończenie generowanym, formalnie rzeczywistym rozszerzeniem. Przestrzeń $M(F)$ jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy R jest przeliczalne, lub* $\operatorname{trdeg} F|R \leqslant 1$.

Niech R będzie właściwym, rzeczywiście domkniętym rozszerzeniem $\mathbb{R}$. Wtedy R jest ciałem niearchimedesowym, zatem zawiera nieskończenie mały element dodatni y. Używając podobnego argumentu jak w dowodzie Twierdzenia 22, otrzymujemy:

Twierdzenie 27 **[4, Theorem 3.5]** *Jeśli R jest właściwym, rzeczywiście domkniętym rozszerzeniem $\mathbb{R}$, wtedy przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów ciała funkcji wymiernych $R(x)$ nie jest metryzowalna.*

Artykuł [5]

Nie wiemy, czy jakakolwiek dwuwymiarowa topologiczna przestrzeń euklidesowa (na przykład torus) jest realizowalna jako przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów. Mieliśmy nadzieję uzyskać taką przestrzeń jako podprzestrzeń pewnej przestrzeni realizowalnej. Naturalnym kandydatem mogłaby być przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów ciała funkcji wymiernych $\mathbb{R}(x, y)$. Rezultaty, które uzyskaliśmy w pracy [**5**], są raczej negatywne.

W pierwszej kolejności rozważamy zanurzenia przestrzeni $M(R(x))$ w przestrzeń $M(F(x))$ dla pewnego formalnie rzeczywistego rozszerzenia F ciała rzeczywiście domkniętego R.

Twierdzenie 28 **[5, Theorem 1.2]** *Niech R będzie ciałem rzeczywiście domkniętym i F jego formalnie rzeczywistym rozszerzeniem. Zanurzenie ciągłe ι przestrzeni $M(R(x))$ w przestrzeń $M(F(x))$, zgodne z restrykcją, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy vR jest podgrupą wypukłą grupy vF, dla waluacji naturalnej v pewnego porządku ciała F. W szczególności, jeśli R jest ciałem archimedesowym to takie zanurzenie zawsze istnieje. Jeśli F jest ciałem rzeczywiście domkniętym, to istnieje co najwyżej jedno takie zanurzenie.*

Z powyższego twierdzenia wynika zaskakujący wniosek. Jeśli R jest niearchimedesowym ciałem rzeczywiście domkniętym i F jest jego elementarnym rozszerzeniem (np. ultrapotęgą) z wystarczająco dużą saturacją, to vR nie jest wypukłą podgrupą grupy vF, a zatem nie istnieje zanurzenie $\iota : M(R(x)) \to M(F(x))$ zgodne z restrykcją.

Aby udowodnić Twierdzenie 28 rozważamy rozszerzenia $F|R$ ciał uporządkowanych (początkowo nie zakładając rzeczywistej domkniętości R) i analizujemy relacje pomiędzy przekrojami w R i w F. Jeśli (D', E') jest przekrojem w F, to $(D' \cap R, E' \cap R)$ jest przekrojem w R, nazywanym *restrykcją* przekroju (D', E'). Niech (D, E) będzie przekrojem w R. Mówimy, że element $a \in F$ *wypełnia* przekrój (D, E), jeśli w F zachodzi nierówność $D < a < E$. Dwa przekroje w R nazywamy *równoważnymi* jeśli są wyznaczone przez tę samą kulę ultrametryczną w R. Zwykle wiele przekrojów ciała F ma tę samą restrykcję do R. To oznacza, że zwykle mamy wiele możliwości wyboru rosnącego i zgodnego z restrykcją zanurzenia przestrzeni $\mathcal{C}(R)$ w $\mathcal{C}(F)$. Naturalnym pytaniem jest, czy są wśród nich zanurzenie ciągłe w topologii porządkowej i zgodne z równoważnością przekrojów.

Stwierdzenie 29 **[5, Proposition 4.7]** *Niech $F|R$ będzie rozszerzeniem ciał uporządkowanych. Jeśli w R istnieje chociaż jeden przekrój nie pochodzący od kuli, który jest wypełniony w F, to nie istnieje ciągłe zanurzenie $\mathcal{C}(R)$ w $\mathcal{C}(F)$, zgodne z restrykcją.*

Aby udowodnić nasz główny wynik rozważamy inną topologię na zbiorze przekrojów. Mówimy, że przedział w $\mathcal{C}(K)$ jest *pełny*, jeśli jest domknięty ze względu na równoważność przekrojów. Topologię generowaną przez zbiory pełne nazywamy *topologią pełną*.

Stwierdzenie 30 **[5, Prop. 4.8 and Prop. 4.9]** *Zanurzenie ciągłe w topologii pełnej i zgodne z restrykcją* $\tilde{\iota}: \mathcal{C}(R) \to \mathcal{C}(F)$ *istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy* vR *jest podgrupą wypukłą* vF.

Teraz załóżmy, że R i F są ciałami rzeczywiście domkniętymi. Niech $\chi_R : \mathcal{C}(R) \to X(R(x))$ i $\chi_F : \mathcal{C}(F) \to X(F(x))$ będą homeomorfizmami między przestrzeniami przekrojów i porządków odpowiednich ciał funkcji wymiernych. Załóżmy dodatkowo, że vR jest podgrupą wypukłą w vF. Możemy zdefiniować zanurzenie $\iota : \ M(R(y)) \longrightarrow M(F(y))$ następująco: $\iota(\xi) \ := \ \lambda \circ \chi_F(\tilde{\iota}(C))$, gdzie C jest przekrojem w R takim, że $\xi = \lambda \circ \chi_R(C)$. Ponieważ $\tilde{\iota}$ zachowuje relację równoważności przekrojów, zanurzenie ι jest poprawnie zdefiniowane i diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(F) & \stackrel{\lambda\circ\chi_F}{\longrightarrow} & M(F(x)) \\ \tilde{\iota}\Big\uparrow & & \iota\Big\uparrow \\ \mathcal{C}(R) & \stackrel{\lambda\circ\chi_R}{\longrightarrow} & M(R(x)) \end{array}$$

jest przemienny.

Twierdzenie 31 **[5, Theorem 5.1]** *Niech* $F|R$ *będzie rozszerzeniem ciał rzeczywiście domkniętych. Jeśli* vR *jest podgrupą wypukłą grupy* vF, *to zanurzenie* ι *zdefiniowane powyżej nie zależy od wyboru* $\tilde{\iota}$, *jest ciągłe i zgodne z restrykcją. Z drugiej strony, jeśli* $\iota : M(R(x)) \to M(F(x))$ *jest zanurzeniem ciągłym i zgodnym z restrykcją, to* vR *jest podgrupą wypukłą grupy* vF. *Ponadto* ι *indukuje zanurzenie* $\tilde{\iota} : \mathcal{C}(R) \to \mathcal{C}(F)$, *które jest ciągłe w topologii pełnej, zgodne z restrykcją i takie, że powyższy diagram jest przemienny.*

Przypuśćmy teraz, że F nie jest ciałem rzeczywiście domkniętym, ale posiada $\mathbb{R}$-punkt ξ taki, że vR jest podgrupą wypukłą $v_\xi F$. Niech R' będzie rzeczywistym domknięciem F względem pewnego porządku P zgodnego z v_ξ.

Ciągła restrykcja

$$M(R'(x)) \stackrel{\mathrm{res}_{F(x)}}{\longrightarrow} M(F(x)) \stackrel{\mathrm{res}_{R(x)}}{\longrightarrow} M(R(x)),$$

pozwala nam zdefiniować zanurzenie ι: $M(R(x)) \to M(F(x))$ przez złożenie $\iota := \mathrm{res}_{F(x)} \circ \iota'$, gdzie $\iota' : \ M(R(x)) \to M(R'(y))$ jest zanurzeniem jak w Twierdzeniu 31. Odwzorowanie ι jest ciągłe, injektywne i zgodne z restrykcją.

Ponieważ rzeczywiste domknięcie R' można wybrać względem dowolnego porządku ciała F zgodnego z v_ξ, więc możemy mieć więcej niż jedno zanurzenie ι. Mamy jednak poniższą częściową jednoznaczność zanurzenia.

Twierdzenie 32 **[5, Theorem 5.2]** *Niech* P_1 *i* P_2 *będą porządkami ciała* F *wyznaczającymi ten sam* $\mathbb{R}$-*punkt,* R'_1 *i* R'_2 *rzeczywistymi domknięciami ciała* F *względem* P_1 *i* P_2 *oraz* $\iota'_i : M(R(x)) \to M(R'_i(x))$, $i = 1, 2$, *ciągłymi zanurzeniami zgodnymi z restrykcją. Rozważmy przemienny diagram:*

$$\begin{tikzcd} & M(R'_1(x)) \arrow[dr, "\mathrm{res}_1"] & \\ M(R(x)) \arrow[ur, "\iota'_1"] \arrow[dr, "\iota'_2"'] & & M(F(x)) \arrow[ll, "\mathrm{res}"'] \\ & M(R'_2(x)) \arrow[ur, "\mathrm{res}_2"'] & \end{tikzcd}$$

Wtedy $\mathrm{res}_1 \circ \iota'_1 \ = \ \mathrm{res}_2 \circ \iota'_2$.

Jeśli R jest archimedesowym ciałem rzeczywiście domkniętym, to $vR = \{0\}$ jest zawsze podgrupą wypukłą vF i zanurzenie $\iota : M(R(x)) \hookrightarrow M(F(x))$ zawsze istnieje. Może być ono określone w następujący sposób. Ustalmy $\mathbb{R}$-punkt ξ ciała F. Niech $\overline{F} \subset \mathbb{R}$ będzie ciałem reszt waluacji odpowiadającej ξ. Ciało $\overline{F}$ możemy traktować jako rozszerzenie ciała R. Niech v_x będzie *waluacją Gaussa* ciała $F(x)$, odpowiadającą jedynemu przedłużeniu ξ_x punktu ξ, które jest trywialne na $R(x)$. Ciałem reszt punktu ξ_x jest ciało $\overline{F}(x)$. Skoro R jest ciałem archimedesowym, każdy $\zeta \in M(R(x))$ jest trywialny na R. Zatem ζ jest punktem stowarzyszonym z waluacją f-adyczną pewnego nierozkładalnego wielomianu $f \in R[x]$ lub przez $f = 1/x$. Skoro R jest rzeczywiście domknięte i $\overline{F}$ jest formalnie rzeczywiste, wielomian f jest nierozkładalny również nad $\overline{F}$ a zatem f (lub $1/x$, odpowiednio) wyznacza jedyne przedłużenie $\zeta_{\overline{F}}$ punktu ζ na $\overline{F}(x)$ trywialne na $\overline{F}$. Definiujemy $\iota'(\zeta) := \zeta_{\overline{F}}$.

Lemat 33 [5, Lemma 6.1] *Odwzorowanie $\iota' : M(R(x)) \to M(\overline{F}(x))$ jest zanurzeniem ciągłym i zgodnym z restrykcją. Jeśli $\overline{F}$ is rzeczywiście domknięte, to jest to homeomorfizm.*

Twierdzenie 34 [5, Theorem 6.2] *Odwzorowanie $\iota : M(R(x)) \to M(F(x))$ zdefiniowane jako $\iota(\zeta) := \zeta_{\overline{F}} \circ \xi_x$ jest zanurzeniem ciągłym.*

Powyższe twierdzenie razem z Twierdzeniem 32 daje nam:

Twierdzenie 35 [5, Theorem 6.3] *Odwzorowanie $\iota : M(R(x)) \to M(R(x, y))$ jest jedynym zanurzeniem ciągłym które jest zgodne z restrykcją i takim, że wszystkie punkty w zbiorze wartości ι maja tę samą restrykcję do $R(y)$.*

Restrykcja punktów wyznacza odwzorowanie $M(\mathbb{R}(x, y)) \to M(\mathbb{R}(x)) \times M(\mathbb{R}(y))$. Rozważmy na $M(\mathbb{R}(x)) \times M(\mathbb{R}(y))$ topologię produktową. Gdyby $M(\mathbb{R}(x)) \times M(\mathbb{R}(y))$ można było zanurzyć w sposób ciągły w $M(\mathbb{R}(x, y))$, wtedy z Twierdzenia 11, otrzymalibyśmy realizowalność torusa.

Rozważmy ogólniejszy przypadek n zmiennych i restrykcję

$$\mathrm{res} : M(\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)) \ni \xi \ \mapsto \ (\xi|_{\mathbb{R}(x_1)}, \ldots, \xi|_{\mathbb{R}(x_n)}) \in \prod_{i=1}^{n} M(\mathbb{R}(x_i)) \, .$$

W **[5, Lemma 7.1]** dowodzimy, że res jest surjekcją. Dla ustalonego $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \prod_{i=1}^{n} M(\mathbb{R}(x_i))$ mamy wiele możliwości wyboru $\xi \in M(\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n))$, którego obrazem jest $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dzięki surjektywności restrykcji dostajemy istnienie zanurzenia

$$\iota : \prod_{i=1}^{n} M(\mathbb{R}(x_i)) \ \hookrightarrow \ M(\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)) \, .$$

Takie zanurzenie nazywamy *zgodnym* jeśli $\mathrm{res} \circ \iota$ jest odwzorowaniem identycznościowym. Używając Zasady Transferowej Tarskiego dowodzimy:

Twierdzenie 36 [5, Theorem 7.3] *Zbiór wartości dowolnego zanurzenia zgodnego ι jest gęsty w $M(\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n))$. Dla $n > 1$, dowolny niepusty zbiór bazowy przestrzeni $M(\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n))$ zawiera nieskończenie wiele punktów, które nie leżą w zbiorze wartości ι.*

Jako wniosek otrzymujemy:

Wniosek 37 [5, Corollary 7.4] *Zanurzenie zgodne ι przestrzeni $\prod_{i=1}^{n} M(\mathbb{R}(x_i))$ w $M(\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n))$ nie może być odwzorowaniem ciągłym w topologii produktowej na $\prod_{i=1}^{n} M(\mathbb{R}(x_i))$.*

Twierdzenie 38 [5, Theorem 7.6] *Dla każdego zgodnego zanurzenia ι, topologia indukowana na produkcie $M(\mathbb{R}(x)) \times M(\mathbb{R}(y))$ jest silniejsza niż topologia produktowa.*

Powyższe wyniki możemy uogólnić. Przypuśćmy, że F_1 i F_2 są ciałami funkcyjnymi nad $\mathbb{R}$, stopnia przestępnego $\geqslant 1$. Zanurzmy je w pewne rozszerzenie E ciała $\mathbb{R}$, w którym będą one liniowo rozłączne nad $\mathbb{R}$. Oznaczmy przez F złożenie ciał F_1 i F_2 w E. Podobnie jak wcześniej rozważamy restrykcję

$$\text{res}: \ M(F) \ni \xi \ \mapsto \ (\xi|_{F_1}, \xi|_{F_2}) \in M(F_1) \times M(F_2),$$

i pokazujemy, że res jest surjektywna, ale nie injektywna. Z surjektywności otrzymujemy zanurzenie

$$\iota: \ M(F_1) \times M(F_2) \ \longrightarrow \ M(F).$$

Jak powyżej, ι nazywamy *zgodnym* jeśli res $\circ\, \iota$ jest identycznością.

Twierdzenie 39 [**5, Theorem 8.2**] *Jeśli $F_1|\mathbb{R}$ i $F_2|\mathbb{R}$ są ciałami funkcyjnymi stopnia przestępnego $\geqslant 1$, zbiór wartości każdego zgodnego zanurzenia ι jest gęsty w $M(F)$. Każdy niepusty zbiór bazowy przestrzeni $M(F)$ zawiera nieskończenie wiele punktów, które nie leżą w obrazie ι.*

Powyższe twierdzenie pokazuje, że dowolne zgodne zanurzenie nie może być ciągłe w topologii produktowej przestrzeni $M(F_1) \times M(F_2)$. W dowodzie używamy Zasady Transferowej Tarskiego oraz wykorzystujemy lemat otrzymany z [KP, p. 190].

W ostatnim rozdziale [**5**] używamy opisanych konstrukcji do zanurzenia $M(K)$ w $M(L)$, dla dowolnego formalnie rzeczywistego ciała K i odpowiednio dobranego rozszerzenia przestępnego L ciała K.

Twierdzenie 40 [**5, Theorem 9.1**] *Przypuśćmy, że istnieje K-wymierny punkt ξ ciała L. Wtedy $\iota: \ M(K) \ni \zeta \ \mapsto \ \zeta \circ \xi \in M(L)$ jest zanurzeniem ciągłym i zgodnym z restrykcją.*

Zauważmy, że w dowodzie Twierdzenia 5, skonstruowaliśmy ciało L dowolnego stopnia przestępnego nad K, które posiada jedyny K-wymierny punkt ξ.

Wniosek 41 [**5, Corollary 9.2**] *Niech x_i, $i \in I$, będą elementami algebraicznie niezależnymi nad K. Istnieje co najmniej $|K|^{|I|}$ różnych ciągłych zanurzeń $M(K)$ w $M(K(x_i\colon i \in I))$, wszystkie zgodne z restrykcją o parami rozłącznych obrazach.*

Wynika to z faktu, że dla dowolnie wybranych elementów $a_i \in K$ istnieje K-wymierny punkt ξ ciała $M(K(x_i\colon i \in I))$ takich, że $\xi(x_i) = a_i$.

Wniosek 42 [**5, Corollary 9.3**] *Istnieje co najmniej $2^{\aleph_0}$ ciągłych zanurzeń ciała $M(\mathbb{R}(x))$ w $M(\mathbb{R}(x, y))$, zgodnych z restrykcją, o parami rozłącznych obrazach.*

Artykuł [6]

Wyniki otrzymane w [**3**] i [**5**] pozwalają nam zobaczyć dokładniej strukturę przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów ciała funkcji wymiernych $R(x)$ nad niearchimedesowym ciałem rzeczywiście domkniętym R. Struktura ta jest opisana w pracy [**6**].

Wpierw pokazujemy, że podbaza przestrzeni $M(R(x))$ może być wybrana jako stosunkowo mała rodzina zbiorów, której moc zależy od mocy wybranego gęstego podciała ciała R.

Niech F będzie ustalonym, gęstym podciałem R. Rozważmy poniższą rodzinę funkcji:

$$\mathcal{F} = \{a + bx, \frac{x-a}{x-b}\colon a, b \in F\}. \tag{2}$$

Rozważając własności przekrojów pochodzących od kul ultrametrycznych i pozostałych przekrojów w R oraz ich relacji z $\mathbb{R}$-punktami uzyskanych w [3], otrzymujemy:

Twierdzenie 43 [**6, Theorem 2.5**] *Rodzina $\{U(f)\colon f \in \mathcal{F}\}$ tworzy podbazę topologii Harrisona przestrzeni $M(R(x))$.*

Rodzina $\mathcal{F}$ słabo rozdziela punkty w $M(R(x))$, to znaczy, dla dowolnych $\xi, \eta \in M(R(x))$, gdzie $\xi \neq \eta$, istnieje $f \in \mathcal{F}$ takie, że $\xi(f) \neq \eta(f)$.

Przypuśćmy, że $M(R(x))$ jest metryzowalna, co oznacza, że R zawiera rzeczywiście domknięte podciało gęste F. Z przeliczalności F, przestrzeń $M(F(x))$ jest metryzowalna. Z drugiej strony, możemy patrzeć na zbiór $M(F(x))$ jako domknięty podzbiór przestrzeni $\overline{\mathbb{R}}^{F(x)}$, gdzie $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. W pracy [13] pokazaliśmy, że $M(F(x))$ jest domkniętym podzbiorem $\overline{\mathbb{R}}^{F(x)}$. Zatem topologia $M(F(x))$ jest indukowana przez metrykę produktu $\overline{\mathbb{R}}^{F(x)}$. Może ona być zdefiniowana w następujący sposób. Wpierw wybieramy bijekcję $\sigma : F(x) \to \mathbb{N}$. Wtedy metryka $\rho : M(F(x)) \times M(F(x)) \to [0, \infty)$ jest określona wzorem

$$\rho(\xi, \eta) = \sup_{f \in F(x)} \{2^{-\sigma(f)} d_0(\xi(f), \eta(f))\},$$

gdzie d_0 jest ustaloną metryką okręgu $\overline{\mathbb{R}}$.

Pokazujemy, że w powyższej definicji metryki możemy ograniczyć się do rodziny $\mathcal{F}$ zdefiniowanej w (2). Tak otrzymane odwzorowanie definiuje metrykę d w $M(F(x))$.

Stwierdzenie 44 [6, Proposition 3.2] *Topologia przestrzeni $M(F(x))$ pokrywa się z topologią indukowaną przez metrykę d zdefiniowaną powyżej.*

Używając homeomorfizmu między przestrzeniami $M(F(x))$ i $M(R(x))$ (zob. Twierdzenie 16), otrzymujemy:

Twierdzenie 45 [6, Theorem 3.3] *Niech R będzie ciałem rzeczywiście domkniętym i F przeliczalnym, rzeczywiście domkniętym, gęstym podciałem R. Niech $\mathcal{F} \subset F(x)$ będzie rodziną zdefiniowaną w (2). Wybierzmy bijekcję $\sigma : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Wtedy odwzorowanie $d : M(R(x)) \times M(R(x)) \to [0, \infty)$ dane wzorem*

$$d(\xi, \eta) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \{2^{-\sigma(f)} d_0(\xi(f), \eta(f))\}$$

wyznacza metrykę na $M(R(x))$.

Od teraz nie zakładamy metryzowalności $M(R(x))$. Naszym celem jest wyznaczenie wymiaru tej przestrzeni. Rozważamy wymiar pokryciowy (dim), mały wymiar indukcyjny (ind) oraz duży wymiar indukcyjny (Ind). Te trzy liczby kardynalne nie zawsze są równe, w szczególności w przypadku przestrzeni niemetryzowalnych. W tym przypadku mamy następujący rezultat:

Twierdzenie 46 [6, Theorem 1.2] *Jeśli R jest ciałem rzeczywiście domkniętym, to wszystkie trzy wymiary przestrzeni $M(R(x))$ są równe i wynoszą 1.*

W dowodzie opieramy się na znanych faktach teorii wymiaru oraz na [NTT, Theorem 5].

Przyjrzyjmy się dokładniej strukturze przestrzeni $M(R(x))$. Struktura ta jest bardzo bogata, z dużą ilością samopodobieństw. Każdy automorfizm σ formalnie rzeczywistego ciała K indukuje homeomorfizm przestrzeni $M(K)$ na siebie przez złożenie $\xi \mapsto \xi \circ \sigma$. Dowolny R-automorfizm σ ciała $R(x)$ wyznaczony jest przez odwzorowanie

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{gdzie } ad - bc \neq 0.$$

Taki automorfizm można otrzymać przez złożenie następujących operacji: $x \mapsto x + c$ dla $c \in R$, $x \mapsto cx$ dla $c \in \dot{R}$ i $x \mapsto x^{-1}$. Każda z powyższych operacji wyznacza ciągłe i bijektywne odwzorowanie na zbiorze $R \cup \{\infty\}$. To z kolei wyznacza odpowiednie ciągłe odwzorowanie na zbiorze przekrojów w R opisane w rozdziale 5 pracy **[6]**. Zaobserwowaliśmy, że

1) Automorfizm indukowany przez $x \mapsto x + c$ przekształca kulę ultrametryczną $B_S(a)$ na kulę $B_S(a + c)$.

2) Automorfizm indukowany przez $x \mapsto cx$ przekształca kulę $B_S(a)$ na kulę $B_{S+v(c)}(ca)$.

3) Automorfizm indukowany przez $x \mapsto x^{-1}$ przekształca kulę ultrametryczną $B_S(a)$ na kulę $B_{S-2va}(\frac{1}{a})$, jeśli $O \notin B_S(a)$ oraz na dopełnienie kuli $B_{-(vR\setminus S)}(0)$, jeśli $O \in B_S(a)$.

Wszystkie trzy operacje zachowują relacje równoważności przekrojów, otrzymujemy zatem:

Stwierdzenie 47 [6, Proposition 5.1] *Wszystkie trzy operacje indukują homeomorfizmy przestrzeni $\mathcal{C}(R)$ zgodne z relacją równoważności.*

Dla dowolnego podzbioru $T \subseteq R$, definiujemy $\hat{T}$ jako domknięcie zbioru $\{a^-, a^+ \colon a \in T\}$ w $\mathcal{C}(R)$ (gdzie a^+, a^- są przekrojami głównymi w punkcie a). Jeśli $T = B$ jest kulą ultrametryczną w R, to $\hat{T}$ jest przedziałem $[B^-, B^+]$. Jeśli T jest dopełnieniem kuli B, tzn. $T = B^c = R \setminus B$, to $\hat{T} = [R^-, B^-] \cup [B^+, R^+]$. Niech $\overline{T}$ będzie zbiorem $\mathbb{R}$-punktów wyznaczonych przez przekroje w $\hat{T}$. Dla dowolnego $r \in R$, zbiór $\{\overline{B_{s^-}(r)} \colon s \in vR\}$ tworzy kofinalny i koinicjalny łańcuch homeomorficznych podprzestrzeni $M(R(x))$. Typ porządkowy tego łańcucha jest równy typowi porządkowemu vR. Jest to również prawdą dla łańcuchów $\{\overline{B_{s^+}(r)} \colon s \in vR\}$ i $\{\overline{B_{S+s}(r)} \colon s \in vR\}$, gdzie S jest klasą górną w vR i $S + s = \{s' + s \colon s' \in S\}$.

Przestrzeń topologiczną M nazywamy *samo-homeomorficzną* jeśli dowolny podzbiór otwarty w M zawiera homeomorficzna kopię M. W szczególnych przypadkach $M(R(x))$ może być samo-homeomorficzna. Rozważmy ciało szeregów formalnych $R = \mathbb{R}((t^{\mathbb{Q}}))$. Jest to ciało rzeczywiście domknięte. Każde dwa przeliczalne, gęsto uporządkowane zbiory liniowo uporządkowane bez punktów końcowych są izomorficzne. Zatem dla dowolnej niepustej klasy górnej S w $\mathbb{Q}$ bez elementu najmniejszego, istnieje izomorfizm rosnący φ_S z $\mathbb{Q}$ na S. Każdy taki izomorfizm indukuje izomorfizm

$$\psi_S : \sum_{q \in \mathbb{Q}} c_q t^q \mapsto \sum_{q \in \mathbb{Q}} c_q t^{\varphi_S(q)}$$

addytywnej grupy uporządkowanej ciała R na jej podgrupę wypukłą $B_S(0)$. Ten izomorfizm indukuje homeomorfizm $\widehat{\psi_S} : \mathcal{C}(R) \to \widehat{B_S(0)}$ zgodny z relacja równoważności. Jeśli r jest dowolnym elementem w R, to możemy złożyć homeomorfizm $\widehat{\psi_S}$ z homeomorfizmem przekształcającym $\widehat{B_S(0)}$ na $\widehat{B_S(r)}$ i otrzymamy homeomorfizm $\overline{\psi_{S,r}} : M(R(x)) \to \overline{B_S(r)}$. Skoro niepuste klasy górne S grupy $\mathbb{Q}$ bez elementu najmniejszego z relacją inkluzji są zbiorem gęsto uporządkowanym i odpowiadają bijektywnie liczbom rzeczywistym i skoro ich przekrój jest pusty, otrzymujemy:

Twierdzenie 48 [6, Theorem 5.2] *Rozważmy ciało $R = \mathbb{R}((t^{\mathbb{Q}}))$ i $r \in R$. Istnieje zbiór podprzestrzeni $M(R(x))$, wszystkich homeomorficznych z $M(R(x))$, na którym inkluzja indukuje gęsty liniowy porządek typu $\mathbb{R}$ i taki, że punkt ξ_r jest jedynym $\mathbb{R}$-punktem ciała $R(x)$ zawartym w każdym z nich.*

W [6, Lemma 5.3] pokazujemy, że dowolnego ciała rzeczywiście domkniętego R, każdy niepusty podzbiór otwarty przestrzeni $M(R(x))$ zawiera $\overline{B_{s^+}(r)}$ dla pewnego $s \in vR$ oraz $r \in R$. Stosując ten wynik dla ciała $R = \mathbb{R}((t^{\mathbb{Q}}))$, otrzymujemy:

Wniosek 49 [6, Corollary 5.4] *Przestrzeń $M(\mathbb{R}((t^{\mathbb{Q}}))(x))$ jest samo-homeomorficzna.*

W ostatnim rozdziale pracy **[6]** opisujemy "fraktalną" strukturę przestrzeni $M(R((x))$. W zbiorze przekrojów $\mathcal{C}(R)$ wpierw identyfikujemy przekroje główne i niewłaściwe. Otrzymujemy w ten sposób zanurzenie cyklicznego porządku $R \cup \{\infty\}$ w $M(R((x))$. Następnie dodajemy obrazy przekrojów nie pochodzących od kul ultrametrycznych, na których to odwzorowanie λ jest różnowartościowe. Jeśli R jest ciałem archimedesowym, to nie mamy już więcej $\mathbb{R}$-punktów do dodania i otrzymujemy w ten sposób okrąg. W przypadku ciała niearchimedesowego R wciąż musimy utożsamić przekroje pochodzące od nietrywialnych kul ultrametrycznych. Zauważamy, że dla każdego $s \in vR$ i $a \in R$,

$$B_{s^-}(a) \;=\; \bigcup_{b \in B_{s^-}(a)} B_{s^+}(b)\,.$$

Z własności kul ultrametrycznych wynika, że jest to suma rozłączna. Wtedy $\overline{B_{s^-}(a)}$ (który nazywamy *pod-kolią* w $M(R(x))$) jest sumą rozłączną homeomorficznych kul $\overline{B_{s^+}(b)}$ (które nazywamy *perłami*) oraz pojedynczego punktu indukowanego przez przekroje kuli $B_{s^-}(a)$, który możemy widzieć jako punk łączący pod-kolię z $M(R(x)) \setminus \overline{B_{s^-}(a)}$. Ten ostatni zbiór jest znów homeomorficzny z perłą. Co więcej, każda perła zawiera znów pod-kolię $\overline{B_{t^-}(a)}$, dla dowolnego $t > s$, homeomorficzną z $\overline{B_{s^-}(a)}$. Zauważmy, że łańcuch pod-kolii $\overline{B_{t^-}(a)}$, $t \in vK$ jest gęsto uporządkowany, ponieważ vK jest grupą podzielną. Ten fakt odróżnia $M(R(x))$ od zwykłych fraktali. Nazywamy go *gęsto fraktalną kolią z pereł.*

Teoretycznie można wyznaczyć wymiar Hausdorffa przestrzeni $M(R(x))$ w metryzowalnym przypadku. Ale wyniki pracy [HR] pokazują, że wymiar ten silnie zależy od wyboru metryki, a jak zauważyliśmy w Twierdzeniu 45, na $M(R(x))$ mamy wiele równoważnych metryk, które zależą od wyboru bijekcji $\sigma : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$.

Artykuł [7]

W tej pracy uogólniamy wynik Gilmera [G] oraz wyniki pracy **[3]** na przypadek ciała funkcyjnego F stopnia przestępnego 1 nad dowolnym rzeczywiście domkniętym ciałem R. Naszym celem jest opisanie struktury przestrzeni porządków ciała F i wyznaczenie, które porządki indukują ten sam $\mathbb{R}$-punkt ciała F.

Rozważmy zbiór wszystkich właściwych pierścieni waluacyjnych ciała F zawierających R. Ideały maksymalne tych pierścieni możemy rozważać jako punkty domknięte schematu stowarzyszonego z F. Zbiór wszystkich punktów rzeczywistych (tzn. z ciałem reszt R) jest gładką i zupełną rzeczywistą krzywą algebraiczną $\mathfrak{c}$. Elementy ciała F możemy rozważać jako funkcje na $\mathfrak{c}$. Dowolne zanurzenie krzywej $\mathfrak{c}$ w przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^n R$ wyznacza *topologię euklidesową* (lub *silną topologię*) na $\mathfrak{c}$, to znaczy najsłabszą topologię, w której wszystkie funkcje w F są ciągłe.

W pracach [Kn1] i [Kn2], M. Knebusch opisał strukturę krzywej $\mathfrak{c}$. Jest ona sumą rozłączną skończonej liczby semialgebraicznych składowych spójnych, $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_N$ które można rozdzielić za pomocą *funkcji rozdzielających składowe* $\eta_i \in F$ w następujący sposób:

$$\operatorname{sgn} \eta_i(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \mathfrak{p} \in \mathfrak{c} \setminus \mathfrak{c}_i, \\ -1 & \text{jeśli } \mathfrak{p} \in \mathfrak{c}_i. \end{cases}$$

Funkcje η_i wyznaczone są jednoznacznie z dokładnością do iloczynu przez (niezerowe) sumy kwadratów. Każda składowa jest homeomorficzna z prostą rzutową $\mathbb{P}^1 R$, posiada zatem dwie orientacje. Krzywa $\mathfrak{c}$ posiada więc 2^N możliwych orientacji. Ustalmy orientację krzywej $\mathfrak{c}$. Na składowej $\mathfrak{c}_i$ można rozważać topologię wyznaczoną przez przedziały w cyklicznym porządku zadanym przez orientację. Dla każdego przedziału $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ istnieje funkcja $\chi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{q})} \in F$ spełniająca warunek:

$$\operatorname{sgn} \chi_{(\mathfrak{p},\mathfrak{q})}(\mathfrak{r}) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \mathfrak{r} \notin [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}], \\ 0 & \text{jeśli } \mathfrak{r} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}, \\ -1 & \text{jeśli } \mathfrak{r} \in (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}). \end{cases}$$

Funkcja ta jest jednoznacznie wyznaczona z dokładnością do iloczynu przez (niezerowe) sumy kwadratów.

Na każdej składowej $\mathfrak{c}_i$ krzywej $\mathfrak{c}$ ustalamy jeden punkt, który oznaczamy ∞_i. Zbiór $\mathfrak{c}_i \setminus \{\infty_i\}$ jest liniowo uporządkowany przez (ustaloną) orientacje na krzywej, możemy zatem rozważać przekroje na $\mathfrak{c}_i$. *Przekrojem składowej* $\mathfrak{c}_i$ nazywamy parę $(\mathfrak{L}, \mathfrak{U})$ podzbiorów $\mathfrak{L}, \mathfrak{U} \subset \mathfrak{c}_i$ taką, że

- $\mathfrak{c}_i$ jest sumą rozłączną $\mathfrak{L} \,\dot\cup\, \mathfrak{U} \,\dot\cup\, \{\infty_i\}$, oraz
- dla każdego $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}$ i każdego $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}$, punkt ∞_i należy do przedziału $(\mathfrak{u}, \mathfrak{l})$.

Z każdym przekrojem $\mathfrak{c}_i$ możemy utożsamić pewien porządek ciała F:

Stwierdzenie 50 [7, Proposition 3.4] *Każdy przekrój $(\mathfrak{L}, \mathfrak{U})$ składowej $\mathfrak{c}_i$ wyznacza porządek P ciała F zdefiniowany następująco:*

$$P = \Psi\big((\mathfrak{L}, \mathfrak{U})\big) = \Big\{ f \in F \colon \exists_{\mathfrak{l} \in \mathfrak{L} \cup \{\infty_i\}} \exists_{\mathfrak{u} \in \mathfrak{U} \cup \{\infty_i\}} \forall_{\mathfrak{p} \in (\mathfrak{l}, \mathfrak{u})}\ f(\mathfrak{p}) > 0 \Big\}.$$

Każdy punkt $\mathfrak{p} \in \mathfrak{c}_i$ wyznacza dwa przekroje główne na $\mathfrak{c}_i$. Z drugiej strony, $\mathfrak{p}$ wyznacza R-wymierny punkt $F \to R \cup \{\infty\}$. Złożenie tego punktu z jedynym $\mathbb{R}$-punktem ciała R daje $\mathbb{R}$-punkt ciała F, który jest wyznaczony przez dwa porządki wyznaczone przez przekroje główne w $\mathfrak{p}$. W [P, Theorem 9.9] autor wykazał, że zbiór porządków odpowiadających punktom R-wymiernym jest gęsty w $X(F)$. Używając tego faktu dowodzimy:

Stwierdzenie 51 [7, Proposition 2.7] *Dla każdego porządku P ciała F istnieje dokładnie jedna składowa $\mathfrak{c}_i$ krzywej $\mathfrak{c}$ taka, że $\eta_i \in -P$.*

Składową $\mathfrak{c}_i$ z powyższego stwierdzenia nazywamy *stowarzyszoną z porządkiem P.*

Stwierdzenie 52 [7, Proposition 3.2] *Każdy porządek P ciała F wyznacza przekrój na stowarzyszonej składowej $\mathfrak{c}_i$ w następujący sposób:*

$$\Phi(P) = (\mathfrak{L}, \mathfrak{U}) \textit{ gdzie } \begin{cases} \mathfrak{U} = \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{c}_i \setminus \{\infty_i\} \colon \chi_{(\mathfrak{p}, \infty_i)} \in P\} \\ \mathfrak{L} = \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{c}_i \setminus \{\infty_i\} \colon \chi_{(\infty_i, \mathfrak{p})} \in P\}. \end{cases}$$

W ten sposób otrzymujemy dwie funkcje $\Phi : X(F) \to \mathcal{C}(\mathfrak{c})$ i $\Psi : \mathcal{C}(\mathfrak{c}) \to X(F)$, gdzie $\mathcal{C}(\mathfrak{c})$ jest zbiorem przekrojów krzywej $\mathfrak{c}$. W **[7, Lemma 3.6]** i **[7, Proposition 3.8]** dowodzimy, że funkcje te są bijekcjami wzajemnie odwrotnymi. Co więcej, obie funkcje są ciągłe i otrzymujemy pierwszy główny wynik pracy **[7]**.

Twierdzenie 53 [7, Theorem 3.10] *Przestrzeń $\mathcal{C}(\mathfrak{c})$ przekrojów krzywej $\mathfrak{c}$ jest homeomorficzna z przestrzenią $X(F)$ porządków ciała F.*

Ustalmy $x \in F \setminus R$. Jest to element przestępny nad R i $R(x) \subseteq F$. Mamy następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 54 [7, Proposition 2.3] *Dla dowolnej funkcji $x \in F$, różnej od stałej i każdej składowej $\mathfrak{c}_i \subseteq \mathfrak{c}$ istnieje skończenie wiele punktów $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_m \in \mathfrak{c}_i$ takich, że na każdym przedziale pomiędzy dwoma kolejnymi punktami funkcja x jest monotoniczna i nie ma asymptot.*

Powyższe stwierdzenie pozwala nam zdefiniować rzutowanie przekrojów krzywej $\mathfrak{c}$ na zbiór przekrojów R. Dla przedziału $I = (a, b)$ w zbiorze uporządkowanym X, symbolem $\mathcal{C}^*(I)$ oznaczamy zbiór wszystkich przekrojów w I, czyli przedział $[a^+, b^-]$. Jeśli $I = \{c \mid c \geqslant a\}$ lub $I = \{c \mid c \leqslant b\}$, to wtedy $\mathcal{C}^*(I)$ definiujemy odpowiednio jako przedział $[a^+, X^+]$ lub $[X^-, b^-]$. Ustalmy przedział $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \subset \mathfrak{c}_i$ na którym funkcja $x \in F$ jest monotoniczna i bez asymptot. Korzystając z [Kn2, Theorem 8.2], otrzymujemy, że rzutowanie $\mathfrak{r} \mapsto x(\mathfrak{r})$ jest izomorfizmem rosnącym (lub malejącym) przedziału $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ na przedział $I := (x(\mathfrak{p}), x(\mathfrak{q}))$ lub $I := (x(\mathfrak{q}), x(\mathfrak{p}))$ w R. Ten izomorfizm indukuje izomorfizm π_x zbioru $\mathcal{C}^*\big((\mathfrak{p}, \mathfrak{q})\big)$ na $\mathcal{C}^*(I)$. Rozkład

$$\mathfrak{c}_i = \{\infty_i\} \,\dot\cup\, (\infty_i, \mathfrak{p}_1) \,\dot\cup\, \{\mathfrak{p}_1\} \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, (\mathfrak{p}_{m-1}, \mathfrak{p}_m) \,\dot\cup\, \{\mathfrak{p}_m\} \,\dot\cup\, (\mathfrak{p}_m, \infty_i)$$

pozwala zdefiniować rozkład

$$\mathcal{C}(\mathfrak{c}_i) = \mathcal{C}^*\big((\infty_i, \mathfrak{p}_1)\big) \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, \mathcal{C}^*\big((\mathfrak{p}_{m-1}, \mathfrak{p}_m)\big) \,\dot\cup\, \mathcal{C}^*\big((\mathfrak{p}_m, \infty_i)\big).$$

Stosując izomorfizm π_x na każdym przedziale otrzymujemy odwzorowanie

$$\pi_x : \mathcal{C}(\mathfrak{c}) \to \mathcal{C}(R).$$

Stwierdzenie 55 **[7, Proposition 3.12]** *Poniższy diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(\mathfrak{c}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_x"] & X(F) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ \mathcal{C}(R) \arrow[r] & X(R(x)) \end{tikzcd}$$

W diagramie tym wszystkie funkcje są ciągłe, a funkcje poziome są homeomorfizmami. Wykorzystując ten fakt przedstawiamy w [**7**] alternatywny dowód stwierdzenia udowodnionego przez C. Scheiderera w dodatku do pracy [GBH]:

Stwierdzenie 56 **[7, Proposition 3.13]** *Przestrzeń $X(F)$ jest homeomorficzna z $X(R(x))$.*

Naszym celem teraz jest rozstrzygnięcie, które przekroje (a dokładniej odpowiadające im porządki) krzywej $\mathfrak{c}$ dają ten sam $\mathbb{R}$-punkt. Dla ciała funkcji wymiernych $R(x)$ takie przekroje wyznaczone są przez kule ultrametryczne w R. Przekroje pochodzące od kul ultrametrycznych w R można opisać również w inny sposób.

Stwierdzenie 57 **[7, Proposition 5.1]** *Niech C będzie przekrojem w R i P porządkiem ciała $R(x)$ odpowiadającym C. Niech v_P będzie waluacją naturalną ciała funkcji wymiernych $R(x)$ wyznaczoną przez P. Przekrój C pochodzi od kuli wtedy i tylko wtedy, gdy $[v_P R(x) : 2v_P R(x)] = 2$.*

Dla dowolnego $x \in F \setminus R$, ciało F jest skończonym rozszerzeniem $R(x)$. Z [Kn, §3] wynika, że

$$[v_P F : 2v_P F] = [v_{\mathrm{res}P} R(x) : 2v_{\mathrm{res}P} R(x)]$$

dla dowolnego porządku P ciała F, niezależnie od wyboru x. Możemy zatem wprowadzić definicję "ball cut" na krzywej. Przekrój C krzywej $\mathfrak{c}$ nazywamy *ball cut* jeśli dla pewnego (czyli również każdego) elementu $x \in F$, przestępnego nad R, rzut $\pi_x(C)$ jest przekrojem pochodzącym od kuli w R.

Twierdzenie 58 **[7, Theorem 5.3]** *Niech C_1 i C_2 będą dwoma "ball cuts" na krzywej $\mathfrak{c}$. Odpowiadające im porządki wyznaczają ten sam $\mathbb{R}$-punkt ciała F wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in F \setminus R$ przekroje $\pi_x(C_1)$ i $\pi_x(C_2)$ są wyznaczone przez tę samą kulę ultrametryczną w R.*

Po zanurzeniu naszej krzywej w przestrzeń afiniczną dostaniemy pełny obraz, który wyjaśni zasadność definicji "ball cut" na krzywej $\mathfrak{c}$.

Ultrametryka wyznaczona przez waluację naturalną v niearchimedesowego ciała rzeczywiście domkniętego R pozwala zdefiniować ultrametrykę na skończenie wymiarowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}^n R$ nad R na wiele sposobów:

$$d_p\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) := v\Big(\sum_{i\leqslant n} |x_i - y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{dla } p = 1,2,\ldots$$
$$d_\infty\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) := \min_{i\leqslant n}\{v(x_i - y_i)\}.$$

W [**7, Proposition 4.2**] udowodniliśmy, że wszystkie te ultrametryki są nie tylko równoważne, ale nawet równe. Mając ultrametrykę na $\mathbb{A}^n R$ możemy definiować kule w klasyczny sposób.

Stwierdzenie 59 **[7, Proposition 6.1]** *Ustalmy gładką, zupełną rzeczywistą krzywą afiniczną $\mathfrak{c} \subset \mathbb{A}^n R$. Przypuśćmy, że składowa $\mathfrak{c}_i$ krzywej ma niepusty przekrój zarówno z kulą ultrametryczną $B \subset \mathbb{A}^n R$ jak i z jej dopełnieniem $\mathbb{A}^n R \setminus B$. Wtedy B indukuje "ball cut" na $\mathfrak{c}_i$ (możliwe, że więcej niż jeden).*

Możemy teraz sformułować kolejny ważny wynik pracy [**7**].

Twierdzenie 60 [7, Theorem 6.2] *Niech $\mathfrak{c}$ będzie gładką, zupełną rzeczywistą krzywą afiniczną nad R. Każdy "ball cut" na krzywej $\mathfrak{c}$ jest indukowany przez pewną kulę ultrametryczną w $\mathbb{A}^n R$.*

Przedstawimy teraz ideę dowodu. Wpierw zauważamy, że teza jest prawdziwa dla przekrojów głównych, indukowanych przez kule jednoelementowe. Ustalamy zatem "ball cut" C na składowej $\mathfrak{c}_k \subseteq \mathfrak{c}$, który nie jest główny. Dla dowolnej współrzędnej x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, rzut $\pi_i(C) = \pi_{x_i}(C)$ jest przekrojem pochodzącym od kuli w R. Konstruujemy przedział $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$ na $\mathfrak{c}_k$ taki, że C jest przekrojem w $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$ i dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$,

- x_i jest monotoniczna na $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$,
- środkiem kul ultrametrycznej wyznaczającej $\pi_i(C)$ jest albo $x_i(\mathfrak{p})$ albo $x_i(\mathfrak{q})$.

W ten sposób otrzymujemy skończony zbiór $\mathcal{B}$ kul ultrametrycznych w R o środkach w $x_i(\mathfrak{p})$ lub $x_i(\mathfrak{q})$. Porównujemy promienie tych kul i wybieramy maksymalny (w sensie inkluzji) promień S. Następnie pokazujemy, że $\mathcal{B}$ zawiera dokładnie jedną kulę B_0 o promieniu S. Bez straty ogólności zakładamy, że B_0 ma środek w $x_i(\mathfrak{p})$. Wybieramy punkt $\mathfrak{p}_0 > \mathfrak{p}$ w klasie dolnej przekroju C taki, że $v(x_i(\mathfrak{p}_0) - x_i(\mathfrak{q})) \in S$ dla wszystkich i takich, że $x_i(\mathfrak{q})$ jest środkiem kuli wyznaczającej $\pi_i(C)$. Następnie pokazujemy, że C jest wyznaczony przez kulę $B_S(\mathfrak{p}_0)$. Jako wniosek otrzymujemy

Twierdzenie 61 [7, Theorem 6.3] *Niech $\mathfrak{c} \subset \mathbb{A}^n R$ będzie gładką, zupełną, rzeczywista krzywą afiniczną. Niech C_1 i C_2 będą przekrojami krzywej $\mathfrak{c}$. Jeśli odpowiadające tym przekrojom porządki ciała wyznaczają ten sam $\mathbb{R}$-punkt ciała F, to istnieje kula ultrametryczna $B \subset \mathbb{A}^n R$ wyznaczająca C_1 i C_2 na $\mathfrak{c}$.*

W ostatniej części pracy [7] przedstawiamy również przykład pokazujący, że powyższego twierdzenia nie można odwrócić. Aby rozróżnić przekroje wyznaczające ten sam $\mathbb{R}$-punkt musimy zatem wybrać szczególne zanurzenie krzywej $\mathfrak{c}$ w przestrzeń afiniczną $\mathbb{A}^n R$.

C) Opis najważniejszych wyników nie wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej

Oprócz algebry rzeczywistej publikowałam prace z ogólnej teorii waluacji oraz zajmowałam się uogólnieniami twierdzeń o punkcie stałym i punkcie koincydencji. Poniższa lista zawiera prace nie wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej:

[8] K. Osiak, *A Cantor cube as a space of higher level orderings*, Tatra Mt. Math. Publ. **32** (2005), 71–84

[9] K. Osiak, A. Sładek, *A note on number of orderings of higher level*, Arch. Math. (Basel) **86** (2006), no. 2, 101–110

[10] K. Osiak, *The Boolean space of higher level orderings*, Fund. Math. **196** (2007), no. 2, 101–117

[11] M. Machura, K. Osiak, *The extensions of $\mathbb{R}$-places and application*, Quadratic forms—algebra, arithmetic, and geometry, 289–297, Contemp. Math. **493**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009

[12] S. Kuhlmann, M. Marshall, K. Osiak, *Cyclic 2-structures and spaces of orderings of power series fields in two variables*, J. Algebra **335** (2011), 36–48

[13] T. Banakh, Y. Kholyavka, O. Potyatynyk, M. Machura, K. Kuhlmann, *On the dimension of the space of $\mathbb{R}$-places of certain rational function fields*, Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), no. 8, 1239–1248

[14] F.-V. Kuhlmann, K. Kuhlmann, *A common generalization of metric, ultrametric and topological fixed point theorems*, Forum Math. **27** (2015), no. 1, 303–327

[15] F.-V. Kuhlmann, K. Kuhlmann, *Correction to A common generalization of metric, ultrametric and topological fixed point theorems*, Forum Math. **27** (2015), no. 1, 329–330

[16] F.-V. Kuhlmann, K. Kuhlmann, S. Shelah, *Symmetrically complete ordered sets, abelian groups and fields*, Israel J. Math. **208** (2015), no. 1, 261–290

[17] F.-V. Kuhlmann, K. Kuhlmann, C. Vişan, *Valuations on rational function fields that are invariant under permutation of the variables*, J. Algebra **464** (2016), 279–296

[18] F.-V. Kuhlmann, K. Kuhlmann, *Fixed point theorems for spaces with a transitive relation*, accepted for publication in Fixed Point Theory

[19] F.-V. Kuhlmann, K. Kuhlmann, F. Sonaallah, *Coincidence point theorems for ball spaces and their applications*, submitted

Pierwsze trzy prace przedstawiają wyniki mojej rozprawy doktorskiej. Zawierają one uogólnienie wyniku Cravena realizowalności przestrzeni boolowskich jako przestrzeni porządków na porządki wyższych stopni wprowadzone przez E. Beckera w [Be0]. W pracy [**8**] pokazujemy, że każda kostka Cantora jest realizowalna jako przestrzeń porządków stopnia n, w [**9**] pokazujemy, jak można uzyskać dowolną przestrzeń skończoną. Praca [**10**] zawiera końcowy wynik.

Praca [**11**] zawiera pewne nowe wyniki teorii przedłużeń $\mathbb{R}$-punktów. Badamy w niej liczbę możliwych przedłużeń $\mathbb{R}$-punktu ciała K na skończone rozszerzenie Galois ciała K. Następnie używamy tych wyników aby pokazać, że klasyczny łuk (odcinek) jest realizowalny jako przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów. Ten wynik został później uogólniony w pracy [**2**].

Artykuł [**12**] zawiera wyniki projektu badawczego w którym uczestniczyłam przebywając jako postdoc na University of Saskatchewan w Kanadzie. Celem tego projektu było opisanie przestrzeni porządków i $\mathbb{R}$-punktów ciała szeregów formalnych dwóch zmiennych $R((x,y))$ nad dowolnym rzeczywiście domkniętym ciałem R. Przestrzeń porządków ciała funkcji wymiernych $R((x))(y)$ jest rozłączną sumą przestrzeni porządków ciał $R_1(y)$ and $R_2(y)$, gdzie R_1, R_2 są rzeczywistymi domknięciami ciała $R((x))$ względem jego jedynych dwóch porządków. Zatem przestrzeń $X(R((x))(y))$ możemy utożsamić z rozłączną sumą $\mathcal{C}(R_1)\,\dot\cup\,\mathcal{C}(R_2)$ przestrzeni przekrojów ciał R_1 i R_2. Restrykcja res : $X(R((x,y))) \to X(R((x))(y))$ jest odwzorowaniem injektywnym ([**12, Lemma 4.3**]), a skoro y jest elementem nieskończenie małym w każdym porządku ciała $R((x))$ otrzymujemy, że obcięcie dowolnego porządku przestrzeni $X(R((x,y)))$ do ciała funkcji wymiernych wyznacza przekrój w jednym z ideałów I_1 lub I_2 elementów nieskończenie małych odpowiednio w R_1 lub R_2. Stąd $X(R((x,y)))$ można utożsamić z $\mathcal{C}(I_1)\,\dot\cup\,\mathcal{C}(I_2)$ ([**12, Lemma 4.5**]). Rozważmy zbiór $S = R_1\,\dot\cup\,R_2\,\dot\cup\,\{+\infty,-\infty\}$. Jest to zbiór uporządkowany cyklicznie, gdzie porządek cykliczny otrzymujemy z liniowych porządków w R_1 and R_2 łącząc je w punktach $\pm\infty$. Jak wcześniej definiujemy przekroje na zbiorze cyklicznie uporządkowanym. Porządki ciała $X(R((x))(y))$ odpowiadają przekrojom w S. Każdy wielomian nierozkładalny pierścienia $R((x))[y]$ wyznaczający formalnie rzeczywiste rozszerzenie ciała $R((x))$ ma dokładnie dwa pierwiastki w $R_1\,\dot\cup\,R_2$. Ten fakt pozwala nam poprawnie zdefiniować odwzorowanie $r \mapsto r'$ z $R_1\,\dot\cup\,R_2$ na siebie, które nazywamy *odwzorowaniem sprzęgającym*. Rozszerzamy je na S sprzęgając $+\infty$ z $-\infty$ i dowodzimy, że tak otrzymane odwzorowanie na S jest ciągłe w topologii cyklicznego porządku [**12, Theorem 3.2**]. *Cykliczną 2-strukturą* nazywamy parę (S,Φ), gdzie S jest zbiorem cyklicznie uporządkowanym, a Φ jest relacją równoważności na S taką, że każda klasa równoważności zawiera dokładnie dwa elementy. Zbiór $S = R_1\,\dot\cup\,R_2\,\dot\cup\,\{+\infty,-\infty\}$ z relacją równoważności wyznaczoną przez odwzorowanie sprzęgające jest cykliczną 2-strukturą. Każda klasa równoważności $\{r,r'\}$ wyznacza dwa łuki $(r,r') = \{s \in S\colon r < s < r'\}$ i $(r',r) = \{s \in S\colon r' < s < r\}$ oraz funkcje $f_1, f_2 : \mathcal{C}(S) \to \{-1,1\}$ (zwane *atomami* stowarzyszonymi z klasą $\{r,r'\}$) zdefiniowane następująco:

$$f_1(x) := \begin{cases} 1 \text{ jeśli } x \text{ jest przekrojem w } (r,r'), \\ -1 \text{ jeśli } x \text{ jest przekrojem w } (r',r) \end{cases}$$

i $f_2 := -f_1$. Przez $G_{(S,\Phi)}$ oznaczamy podgrupę grupy funkcji $f : \mathcal{C}(S) \to \{-1,1\}$ generowaną przez funkcje stałe $1, -1$ i atomy stowarzyszone z klasami równoważności w S. Parę (X,G), gdzie X jest zbiorem i G grupą funkcji z X w $\{-1,1\}$, nazywamy *opisaną przez cykliczną 2-strukturę* (S,Φ) jeśli istnieje bijekcja $p: X \to \mathcal{C}(S)$ taka, że $G = \{f \circ p \colon f \in G_{(S,\Phi)}\}$. Pierwszym ważnym wynikiem **[12]** jest:

Twierdzenie 62 [12, Theorem 5.1] *Dla dowolnego ciała rzeczywiście domkniętego R, przestrzenie porządków ciał $R((x))(y)$ i $R((x,y))$ są opisane przez cykliczne 2-struktury w naturalny sposób.*

Drugi ważny wynik pracy **[12]** pokazuje, że jeśli R jest ciałem archimedesowym, to również przestrzenie $\mathbb{R}$-punktów ciał $R((x))(y)$ i $R((x,y))$ mogą być opisane w języku cyklicznych 2-struktur.

Twierdzenie 63 [12, Theorem 6.5] *Niech P i Q będą dwoma różnymi porządkami ciała $R((x))(y)$ lub ciała $R((x,y))$.*

(1) Wystarczającym warunkiem, by P i Q wyznaczały ten sam $\mathbb{R}$-punkt jest, że dla dowolnej pary przedziałów (r_1,s_1) i (r_2,s_2) cyklicznie uporządkowanego zbioru S takich, że $P \in \mathcal{C}((r_1,s_1))$ i $Q \in \mathcal{C}((r_2,s_2))$, istnieją elementy sprzężone $r, r' \in S$ takie, że $r_1 < r < s_1$ i $r_2 < r' < s_2$.

(2) Jeśli R jest ciałem archimedesowym, to warunek konieczny opisany w (1) jest również warunkiem wystarczającym.

W pracy **[13]** badamy wymiar przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów ciała funkcji wymiernych $K(x_1,\ldots,x_n)$ wielu zmiennych nad totalnie archimedesowym ciałem K. Dowodzimy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ przestrzeń $M(K(x_1,\ldots,x_n))$ wa wymiar pokryciowy $\dim M(K(x_1,\ldots,x_n)) \leqslant n$. Głównym wynikiem pracy jest:

Twierdzenie 64 [13, Theorem 2] *Dla dowolnego totalnie archimedesowego ciała K przestrzeń $\mathbb{R}$-punktów $M(K(x,y))$ ma całkowity wymiar kohomologiczny* $\dim_{\mathbb{Z}} M(K(x,y)) = \dim M(K(x,y)) =$ 2 *i wymiar kohomologiczny* $\dim_G M(K(x,y)) = 1$ *dla dowolnej nietrywialnej 2-podzielnej abelowej grupy G.*

Ten wynik pokazuje, że przestrzeń $M(K(x,y))$ jest naturalnym przykładem przestrzeni zwartej, która nie jest wymiarowo pełno-wartościowa (co oznacza, że kohomologiczne wymiary dla różnych grup współczynników nie pokrywają się). Dowód opiera się na pojęciu i własnościach *grafoidów* wprowadzonych przez T. Banakha i O. Potyatynyka w [BP]. Jest to bardzo ważny wynik w teorii $\mathbb{R}$-punktów, ale nie może być on uwzględniony w rozprawie habilitacyjnej, ponieważ jedynym wkładem habilitantki w pracę, poza zwróceniem uwagi autorów na problem metryzowalności, był dowód Twierdzenia 2.2 identyfikującego punkty odpowiedniego grafoidu z $\mathbb{R}$-punktami ciała $K(x,y)$.

"Fraktalna" struktura przestrzeni $\mathbb{R}$-punktów ciała funkcji wymiernych nad niearchimedesowym ciałem rzeczywiście domkniętym R motywowała nas, by poszukać możliwych uogólnień twierdzeń o punkcie stałym dla odwzorowań zwężających lub nierozszerzających znanych osobno dla (uogólnionych) przestrzeni metrycznych, ultrametrycznych i topologicznych. W każdym z tych przypadków potrzebujemy pojęcia *zupełności*. W pracy **[14]** wprowadzamy pojęcie *przestrzeni z kulami - "ball space"*, która jest zbiorem niepustym X z niepustą rodziną $\mathcal{B}$ podzbiorów niepustych, które nazywamy *kulami*. "Ball space" nazywamy *sferycznie zupełną* jeśli każdy niepusty łańcuch kul ma przekrój niepusty. Terminologia jest zaczerpnięta z teorii przestrzeni ultrametrycznych, a pojęcie sferycznej zupełności pokrywa się z tym samym pojęciem w przypadku przestrzeni ultrametrycznych. Dla przestrzeni topologicznych z rodziną niepustych zbiorów domkniętych sferyczna zupełność jest równoważna pojęciu zwartości. Zupełność przestrzeni metrycznych jest równoważna sferycznej zupełności rodziny metrycznych kul domkniętych, których promienie tworzą podzbiór zbioru $\mathbb{R}^+$ z jedynym punktem skupienia 0. Dla funkcji $f: X \to X$, podzbiór $B \subseteq X$ nazywamy *f-zwężającym* jeśli jest zbiorem jednoelementowym zawierającym punkt stały lub spełnia warunek $f(B) \subsetneq B$. Sformułujemy teraz dwa główne twierdzenia pracy **[14]**.

Twierdzenie 65 *Niech f będzie funkcją na przestrzeni z kulami $(X,\mathcal{B})$ spełniająca poniższe warunki:*

(C1) *istnieje przynajmniej jedna kula f-zwężająca,*
(C2) *dla każdej f-zwężającej kuli $B \in \mathcal{B}$, obraz $f(B)$ zawiera kulę f-zwężającą,*
(C3) *przekrój dowolnego łańcucha f-zwężających kul zawiera kulę f-zwężającą.*

Wtedy f posiada punkt stały.

Twierdzenie 66 *Niech f będzie funkcją na przestrzeni z kulami $(X, \mathcal{B})$ spełniająca poniższe warunki:*

(CU1) *X jest kulą f-zwężającą,*
(CU2) *dla każdej f-zwężającej kuli $B \in \mathcal{B}$, obraz $f(B)$ jest kulą f-zwężającą,*
(CU3) *przekrój dowolnego łańcucha f-zwężających kul jest kulą f-zwężającą.*

Wtedy f ma dokładnie jeden punkt stały.

W [**14**] pokazujemy jak z powyższych twierdzeń możemy otrzymać znane twierdzenia o punkcie stałym dla (odpowiednio zdefiniowanych) odwzorowań zwężających: twierdzenie Banacha dla przestrzeni metrycznych, jego ultrametryczną wersję udowodniona przez S. Prieß-Crampe i P. Ribenboima w [PR] i topologiczna wersję dla spójnych przestrzeni topologicznych udowodnioną w [SWJ].

Elastyczność pojęcia "ball space" pozwala nam przenieść twierdzenie Banacha na uogólnione przestrzenie metryczne (gdzie metryka przyjmuje nieujemne wartości w pewnej, niekoniecznie archimedesowej, grupie uporządkowanej). Naturalnym przykładem takiej przestrzeni jest dowolna niearchimedesowa grupa uporządkowana (lub ciało uporządkowane). W tym przypadku mamy dwie naturalne klasy przestrzeni z kulami:

- porządkowa przestrzeń z kulami, gdzie jako kule rozważamy przedziały domknięte i ograniczone
- ultrametryczna przestrzeń z kulami, gdzie jako kule rozważamy kule ultrametryczne wyznaczone przez waluację naturalną.

Omawiamy te przestrzenie i przedstawiamy odpowiednie twierdzenia o punkcie stałym. Rozważamy również mieszaną przestrzeń z kulami, w której używamy przedziałów i kul ultrametrycznych równocześnie. Pozwala nam to przedstawić prostą charakteryzację ciał szeregów formalnych z ciałem reszt $\mathbb{R}$.

Grupy i ciała uporządkowane, które są sferycznie zupełne jako porządkowe przestrzenie z kulami są głównym tematem pracy [**16**]. Niech X będzie zbiorem uporządkowanym. Rozważmy łańcuch $\mathcal{N} = ([a_i, b_i])_{i\in I}$ przedziałów domkniętych i ograniczonych w X i przypuśćmy, że przekrój $\mathcal{N}$ jest pusty. Oznacza to, że istnieje przekrój (D, E) w X taki, że ciąg $(a_i)_{i\in I}$ jest kofinalny w D i ciąg $(b_i)_{i\in I}$ jest koinicjalny w E. Taka sytuacja nie będzie mieć miejsca, jeśli dla dowolnego przekroju C w X kofinalność klasy dolnej C i koinicjalność klasy górnej C są różne - taki przekrój nazywamy *asymetrycznym.* Już Hausdorff ([Hd]) w roku 1907 udowodnił, że istnieją zbiory uporządkowane w których każdy przekrój jest asymetryczny. Obecnie takie zbiory nazywamy *symetrycznie zupełnymi.* Pojęcie symetrycznej zupełności dla ciał uporządkowanych zostało wprowadzone przez S. Shelaha w [S], gdzie udowodnił on że każde ciało uporządkowane można rozszerzyć do symetrycznie zupełnego ciała uporządkowanego. W pracy [**16**] uogólniamy ten wynik na uporządkowane grupy abelowe. Okazuje się, że jeśli grupa uporządkowana G jest symetrycznie zupełna, to również grupa vG waluacji naturalnej v grupy G musi być symetrycznie zupełna. Nawet musi mieć silniejszą własność. Przekrój C zbioru X nazywamy *silnie asymetrycznym* jeśli jest asymetryczny i kofinalność jego klasy dolnej, lub koinicjalność klasy górnej jest nieprzeliczalna. Zbiór uporządkowany X nazywamy *silnie symetrycznie zupełnym*, gdy każdy przekrój w X, który nie jest skokiem, jest silnie asymetryczny i mówimy, że X jest *ekstremalnie symetrycznie zupełny* jeśli dodatkowo kofinalność i koinicjalność zbioru X są nieprzeliczalne. Poniższe dwa twierdzenia dają pełną charakteryzację symetrycznie zupełnych ciał i grup uporządkowanych.

Twierdzenie 67 *Nietrywialna, gęsto uporządkowana grupa abelowa G jest symetrycznie zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy jest sferycznie zupełna względem swojej waluacji naturalnej v, ma gęsto* *uporządkowany i silnie symetrycznie zupełny zbiór wartości vG i wszystkie jej archimedesowe składowe są izomorficzne z $\mathbb{R}$. Ponadto jest silnie symetrycznie zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy vG ma nieprzeliczalną kofinalność i jest ekstremalnie sferycznie zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy dodatkowo vG jest ekstremalnie symetrycznie zupełna.*

Twierdzenie 68 *Ciało uporządkowane K jest symetrycznie zupełne wtedy i tylko wtedy, gdy jest sferycznie zupełne względem względem swojej waluacji naturalnej v, ma ciało reszt $\mathbb{R}$ oraz gęsto uporządkowaną silnie symetrycznie zupełną grupę wartości vK. Ponadto poniższe warunki są równoważne:*

a) K jest silnie symetrycznie zupełne,

b) K jest ekstremalnie symetrycznie zupełne,

c) K jest sferycznie zupełne względem swojej waluacji naturalnej v, $\mathbb{R}$ jest jego ciałem reszt, a grupa vK jest grupą gęsto uporządkowaną i ekstremalnie symetrycznie zupełną.

Poniższy wniosek podaje ważne własności symetrycznie zupełnych grup i ciał uporządkowanych.

Wniosek 69 *Każda gęsto uporządkowana i symetrycznie zupełna grupa abelowa jest podzielna i izomorficzna z produktem Hahna. Każde symetrycznie zupełne ciało uporządkowane jest rzeczywiście domknięte i izomorficzne z ciałem szeregów formalnych z ciałem reszt $\mathbb{R}$ i podzielną grupą wartości jego waluacji naturalnej.*

Badania przestrzeni z kulami nie są jeszcze zakończone. W pracy **[18]** używamy ich w dowodzie twierdzenia o punkcie stałym dla przestrzeni z przechodnią relacją (które można widzieć jako indukowany przez tę relację graf). W pracy **[19]** udowadniamy twierdzenia o punkcie koincydencji dla przestrzeni z kulami, uogólniające twierdzenia o punkcie stałym oraz prezentujemy ich różne zastosowania

Na klasie przestrzeni z kulami można wprowadzić klasyfikację zależną od stopnia ich zupełności. Rozważamy przekroje łańcuchów oraz skierowanych i scentrowanych systemów kul. Kryterium klasyfikacyjne zależy od tego, czy taki przekrój jest niepusty, zawiera kulę, zawiera największą kulę lub jest kulą. Przykładami najsilniejszych przestrzeni, czyli takich w których przekrój dowolnego scentrowanego systemu kul jest kulą (oznaczamy je S^*), są: przestrzenie ultrametryczne z rodziną wszystkich niepustych kul ultrametrycznych, zwarte przestrzenie topologiczne z rodzina wszystkich niepustych zbiorów domkniętych, czy kraty zupełne z rodziną wszystkich, niepustych i domkniętych przedziałów ograniczonych.

Twierdzenie o punkcie stałym dla przestrzeni z kulami uogólnia twierdzenie o punkcie stałym Bourbakiego-Witta dla rosnących funkcji na częściowym porządku z elementem najmniejszym jak również twierdzenie o punkcie stałym Knastera-Tarskiego dla rosnących funkcji na kratach zupełnych. To ostatnie twierdzenie mówi nie tylko o istnieniu punktów stałych dla takich odwzorowań, ale również o strukturze zbioru punktów stałych: jest on również kratą zupełną. Wynik ten można uogólnić na przestrzenie z kulami, które są S^*. To pozwala sformułować odpowiednik twierdzenia Knastera-Tarskiego dla przestrzeni ultrametrycznych oraz topologicznych.

Podobnie, można udowodnić analog twierdzenia Tichonowa dla przestrzeni z kulami, mówiący, że produkt sferycznie zupełnych przestrzeni z kulami, zdefiniowany w naturalny sposób, jest również przestrzenią sferycznie zupełną. Ten wynik pozwala przenieść twierdzenie Tichonowa na inne struktury, na przykład przestrzenie ultrametryczne.

Omówione wyniki zostały zaprezentowane na dwóch szkołach letnich: 29th Summer Conference on Topology and its Applications na City University of New York w czerwcu 2014r. oraz na Summer School Around Valuation Theory w Sirince w maju 2014r. Obecnie naszym celem jest opracowanie monografii w serii "Lecture Notes in Mathematics" na temat "ball spaces" i ich zastosowań.

Literatura:

[AS] E. Artin, O. Schreier, *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), 85–99

[B1] R. Baer, *Über nicht-archimedisch geordnete Körper*, Sitz. Ber. der Heidelberger Akad. **8** Abh. (1927), 3–13

[B2] R. Baer, *Zur Topologie der Gruppen*, J. reine angew. Math. **160** (1929), 208–226

[BP] T. Banakh, O. Potyatynyk, *Dimension of graphoids of rational vector-functions*, Topology Appl. **160** (2013), 24–44.

[Be0] E. Becker, *Hereditarily Pythagorean Fields and Orderings of Higher Level*, Monograf. Mat. **29**, Ins. Mat. Pura Aplicada, Rio de Janero (1978)

[Be1] E. Becker, *Valuations and real places in the theory of formally real fields*, Real algebraic geometry and quadratic forms (Rennes, 1981), 1–40, Lecture Notes in Math. **959**, Springer, Berlin-New York, 1982

[Be2] E. Becker, *The real holomorphy ring and sums of* $2n$*-th powers*, Real algebraic geometry and quadratic forms (Rennes, 1981), 139–181, Lecture Notes in Math. **959**, Springer, Berlin-New York, 1982

[Be3] E. Becker, *Sums of powers in fields and orderings of higher level*, preprint

[BG] E. Becker, D. Gondard, *Notes on the space of real places of a formally real field*, Real Analytic and Algebraic Geometry (Trento, 1992), 21–46, de Gruyter, Berlin, 1995

[BCR] J. Bochnak, M. Coste, and M. Roy, *Real algebraic geometry*, volume 36 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Br] R. Brown, *Real-valued places on the function field of an algebraic curve*, Houston J. Math. **6** (1980), 227–243

[Br1] R. Brown, *Real places and ordered fields.* Rocky Mount. J. Math. **1** (1971), 633–636

[BM] R. Brown and J. Merzel, *The space of real places on* $\mathbb{R}(x, y)$, preprint

[Cr] T. C. Craven, *The topological space of orderings of a rational function field*, Duke Math. J. **41**, (1974), 339–347

[C] T. C. Craven, *The Boolean space of orderings of a field*, Trans. Amer. Math. Soc. **209** (1975), 225–235

[D] D. W. Dubois, *Infinite primes and ordered fields*, Dissertationes Math. **69** (1970), 1–43

[E] Y. L. Ershov, *The number of linear orders on a field*, Mat. Zametki **6** (1969), 201–211; English transl. in Math. Notes **6** (1969)

[G] R. Gilmer, *Extension of an order to a simple transcendental extension*, Ordered fields and real algebraic geometry (San Francisco, Calif., 1981), 113–118, Contemp. Math. **8**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982

[GM] D. Gondard, M. Marshall, *Towards an abstract description of the space of real places*, Contemp. Math. **253** (2000), 77–113

[GBH] N. Grenier-Boley, D. Hoffmann, *Isomorphism criteria for Witt rings of real fields*, Forum Math. **25** (2013), 1–18 (with an appendix by Claus Scheiderer)

[HR] K. E. Hare, J. Rönning, *Fractal dimensions of infinite product spaces*, Int. J. Pure Appl. Math. **14** (2004), no. 2, 139–169

[H] J. Harman, *Chains of higher level orderings*, Contemp. Math. **8** (1982), 141–174

[Hd] Hausdorff, F. *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Math. Ann. **65** (1908), 435–505

[K] W. Krull, *Allgemeine Bewertungstheorie*, J. reine angew. Math. **167** (1931), 160–196

[Kn] M. Knebusch, *On the extension of real places*, Comment. Math. Helv. **48** 1973, 354–369

[Kn1] M. Knebusch, *On algebraic curves over real closed fields. I*, Math. Zeit. **150** (1976), 49–70

[Kn2] M. Knebusch, *On algebraic curves over real closed fields. II*, Math. Zeit. **151** (1976), 189–205

[KP] F.-V. Kuhlmann and A. Prestel, *On places of algebraic function fields*, J. reine angew. Math. **353** (1984), 181–195

[L] T. Y. Lam, *Orderings, valuations and quadratic forms*, CBMS Regional Conf. Ser. Math. **52**. Published for the Conf. Board of the Math. Sciences, Washington (1983)

[LL] F. Lorenz, J. Leicht, *Die Primideale des Wittschen Ringes*, Invent. Math. **10** (1970), 82–88

[N] J. Nagata, *Modern dimension theory*, Bibliotheca Mathematica, Vol. VI. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York 1965

[NTT] J. Nikiel, H. M. Tuncali, E. D. Tymchatyn, *On the rim-structure of continuous images of ordered compacta*, Pacific J. Math. **149** (1991), 145–155

[P] A. Prestel, *Lectures on formally real fields*, Lecture Notes in Mathematics **1093**, Springer-Verlag, Berlin, 1984

[PR] S. Prieß-Crampe, P. Ribenboim, *Fixed Point and Attractor Theorems for Ultrametric Spaces*, Forum Math. **12** (2000), 53–64

[Sch] H.-W. Schülting, *Real points and real places*, Ordered fields and real algebraic geometry (San Francisco, Calif., 1981), 289–295 Contemp. Math. **8**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982

[S] Shelah, S.: *Quite Complete Real Closed Fields*, Israel J. Math. **142** (2004), 261–272

[SWJ] J. Steprāns, S. Watson, W. Just, *A topological Banach fixed point theorem for compact Hausdorff spaces*, Canad. Bull. Math. **37** (1994), 552–555

Katarzyna Kuhlmann