Załącznik Nr 3

Autoreferat

1. Imię i nazwisko: **Robert Rałowski**
2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:
   - dyplom magistra fizyki, Politechnika Wrocławska, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, 1989,
   - stopień doktora fizyki, Uniwersytet Wrocławski, Wydział Fizyki i Astronomii, 1998.
3. Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych:
   - stanowisko asystenta, Instytut Niskich Temperatur i Badań Strukturalnych, Polska Akademia Nauk, 1990 – 1992,
   - doktorant, Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Wrocławski, 1992–1997,
   - stanowisko asystenta, Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska, 1997 – 1999,
   - stanowisko adiunkta, Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska, od 1999 do 31 października 2014,
   - stanowisko adiunkta, Katedra Informatyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wrocławska, od 1 listopada 2014.
4. Osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi jednotematyczny cykl publikacji pod tytułem:

Niemierzalne podzbiory w przestrzeniach polskich.

Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia

[H1] J. Cichoń, M. Morayne, R. Rałowski, Cz. Ryll-Nardzewski, Sz. Żeberski, On nonmeasurable unions, Topology and its Applications, 154 (2007), 884-893,

[H2] R. Rałowski, Sz. Żeberski, Complete nonmeasurability in regular families, Houston Journal of Mathematics, 34 (3) (2008), 773-780,

[H3] R. Rałowski, Remarks on nonmeasurable unions of big point families, Mathematical Logic Quarterly, vol. 55, nr 6 (2009), 659-665,

[H4] R. Rałowski, Nonmeasurability in Banach spaces, Far East Journal of Mathematical Sciences, vol. 36, nr 2 (2010), 125-131,

[H5] R. Rałowski and Sz. Żeberski, On nonmeasurable images, Czechoslovak Mathematical Journal, 60(135) (2010), 424-434,

[H6] R. Rałowski, Sz. Żeberski, Completely nonmeasurable unions, Central European Journal of Mathematics, 8(4) (2010), 683-687,

[H7] R. Rałowski, Sz. Żeberski, Generalized Luzin sets, Houston Journal of Mathematics, electronic edition vol. 39, no. 3 , 2013, 983-993,

[H8] R. Rałowski, Families of sets with nonmeasurable unions with respect to ideals defined by trees, Archive for Mathematical Logic, 54 (2015), no. 5-6, 649-658.

Omówienie celu naukowego i osiągniętych wyników na podstawie wyżej wymienionych prac

Motywacja i opis dziedziny

Henri Lebesgue w swojej pracy [Leb] z 1904 roku postawił następujący problem: *czy istnieje nieujemna funkcja określona na wszystkich podzbiorach odcinka $m : \mathscr{P}([0,1]) \to [0,1]$, spełniająca warunki*

(1) *m jest niezmiennicza na przesunięcia, tzn.*

$$(\forall X, Y \in \mathscr{P}([0,1]))(\forall t \in \mathbb{R})\ (Y = (X+t) \mod 1 \longrightarrow m(X) = m(Y)),$$

(2) *m jest σ-addytywna, tzn.: jeśli $\mathcal{F} \in [\mathscr{P}([0,1])]^{\omega}$ jest przeliczalną rodziną zbiorów parami rozłącznych, to $m(\bigcup \mathcal{F}) = \sum_{A \in \mathcal{F}} m(A)$,*

(3) *$m([0,1]) = 1$.*

Tutaj $\mathscr{P}(X)$ oznacza zbiór potęgowy zbioru X oraz $[X]^{<\kappa} = \{A \in \mathscr{P}(X) : |A| < \kappa\}$. Analogicznie definiujemy $[X]^{\kappa}$, $[X]^{\leq\kappa}$.

Niebawem, bo w 1905 roku Giuseppe Vitali wykazał w pracy [Vitali], że takiej funkcji na $\mathscr{P}([0,1])$ nie ma.

Pokazał on bowiem, że każdy selektor klas abstrakcji relacji równoważności na zbiorze liczb rzeczywistych zadanej wzorem $x \sim y \longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ jest zbiorem niemierzalnym (oczywiście, do istnienia takich selektorów potrzebny jest aksjomat wyboru).

Stefan Banach i Kazimierz Kuratowski [BaKu], przy założeniu hipotezy continuum **CH**, dali negatywną odpowiedź na analogiczny problem do podanego przez Lebesgue'a, gdzie warunek (1) został zamieniony na warunek, że miara m znika na wszystkich zbiorach jednopunktowych.

Niech X będzie zbiorem nieskończonym, funkcję $m : \mathscr{P}(X) \to [0,1]$ nazywamy nietrywialną κ-addytywną miarą jeśli:

(1) $(\forall x \in X)\ m(\{x\}) = 0$,
(2) $(\forall \mathcal{F} \in [\mathscr{P}(X)]^{<\kappa})(\forall A, B \in \mathcal{F})((A \neq B \longrightarrow A \cap B = \emptyset) \longrightarrow (m(\bigcup \mathcal{F}) = \sum_{A \in \mathcal{F}} m(A)))$,
(3) $m(X) = 1$.

Miarę m nazywamy σ-addytywną jeśli jest ω_1-addytywna.

Niech κ będzie liczbą kardynalną taką że $|X| = \kappa$. Jeśli na zbiorze X istnieje nietrywialna κ-addytywna miara spełniająca powyższe warunki, to liczbę kardynalną κ nazywamy rzeczywiście mierzalną. Liczba rzeczywiście mierzalna jest liczbą słabo nieosiągalną, tzn. nieprzeliczalną liczbą graniczną, która jest regularna. Ponadto, nieprzeliczalna liczba kardynalna κ jest liczbą mierzalną jeśli istnieje κ-zupełny niegłówny ultrafiltr $\mathcal{U}$ na κ. Każdy taki ultrafiltr generuje dwuwartościową miarę κ-addytywną na liczbie kardynalnej κ, zdefiniowaną następująco:

$$(\forall A \in \mathscr{P}(\kappa))\ m(A) = \begin{cases} 1 & A \in \mathcal{U} \\ 0 & A \notin \mathcal{U} \end{cases}.$$

Liczba mierzalna κ jest liczba nieosiągalną, tzn. jest regularną, nieprzeliczalną liczbą graniczną taką, że dla każdej liczby kardynalnej $\lambda < \kappa$ zachodzi $2^{\lambda} < \kappa$. Pojęcie liczby mierzalnej było wprowadzone przez Stanisława Ulama w pracy [Ulam]. W tym samym artykule autor udowodnił twierdzenie, które otworzyło bardzo ważną gałąź teorii mnogości, teorię dużych liczb kardynalnych.

Twierdzenie 1 (Ulam, 1930)**.** *Jeżeli istnieje nietrywialna miara σ-addytywna na zbiorze X, to istnieje liczba mierzalna κ nie większa od $|X|$ lub istnieje liczba rzeczywiście mierzalna nie większa niż $2^{\aleph_0}$.*

Robert Solovay udowodnił [So2], że jeśli κ jest liczbą mierzalną, to istnieje takie pojęcie forsingu $\mathbb{P}$, że w rozszerzeniu generycznym $V[G]$, gdzie $G \subseteq \mathbb{P}$ jest filtrem generycznym nad modelem V, zachodzi $\kappa = 2^{\aleph_0}$ oraz κ jest liczbą rzeczywiście mierzalną.

W artykule [So1] Robert Solovay wykazał, że przy założeniu istnienia liczby nieosiągalnej jest niesprzeczne z **ZF**+ **DC**, że każdy podzbiór prostej rzeczywistej jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, ma własność Baire'a oraz każdy nieprzeliczalny podzbiór prostej $\mathbb{R}$ zawiera zbiór doskonały. Dla przypomnienia, zasada **DC** mówi, że dla każdego niepustego zbioru X oraz dowolnej relacji $R \subseteq X \times X$ takiej, że $dom(R) = X$, istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\omega} \in X^\omega$ spełniający dla każdego $n \in \omega$ warunek $(x_n, x_{n+1}) \in R$.

Twierdzenie o rekursji pozaskończonej w połączeniu z aksjomatem wyboru **AC**, jest efektywnym narzędziem do konstrukcji zbiorów niemierzalnych względem miary Lebesgue'a oraz zbiorów nie posiadających własności Baire'a. Stosując wspomnianą rekursję pozaskończoną, możemy, na przykład, skonstruować zbiór Bernsteina. Zbiorem Bernsteina nazywamy taki podzbiór $A \subseteq X$ przestrzeni polskiej X, że dla każdego podzbioru doskonałego $P \subseteq X$ mamy $A \cap P \neq \emptyset$ i $A^c \cap P \neq \emptyset$.

Nikołaj Łuzin a następnie Wacław Sierpiński udowodnili, że **CH** implikuje istnienie zbioru Łuzina $L \subseteq X$ w przestrzeni polskiej. Zbiór Łuzina jest to taki zbiór, który z każdym zbiorem pierwszej kategorii ma przeliczalny przekrój. Zbiór Sierpińskiego definiujemy analogicznie, z tą różnicą, że σ-ideał zbiorów pierwszej kategorii Baire'a $\mathcal{M}$, zastępujemy σ-ideałem $\mathcal{N}$ wszystkich zbiorów o mierze Lebesgue'a równej zero na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.

Sierpiński pokazał, że jeśli U jest niegłównym ultrafiltrem na ω, to

$$\{x \in 2^\omega : \ \{n \in \omega : \ x(n) = 1\} \in \mathscr{U}\}$$

jest niemierzalny względem miary Haara na przestrzeni Cantora 2^ω.

Jacek Cichoń i Przemysław Szczepaniak [CS] podali metodę tworzenia niemierzalnych podzbiorów przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, wykorzystując izomorfizm przestrzeni liniowych $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ nad ciałem liczb wymiernych, dla dowolnych dodatnich różnych liczb naturalnych m i n. Jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest takim izomorfizmem dla różnych liczb m, n, to dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o niepustym wnętrzu A i A^c, obraz $f[A] \subseteq \mathbb{R}^m$ jest zbiorem niemierzalnym względem m-wymiarowej miary Lebesgue'a.

Istnienie zbioru Bernsteina, jak i konstrukcja zbioru Vitalego oraz istnienie zbioru niemierzalnego powstałego z niegłównego ultrafiltru na ω zaproponowanego przez Sierpińskiego jest dowodliwe w teorii **ZFC**. Tak nie jest w przypadku zbioru Łuzina czy Sierpińskiego. Zbiory te można skonstruować przy założeniu hipotezy continuum. Z aksjomatu Martina oraz negacji hipotezy continuum (**MA** + $\neg$**CH**) wynika, że nie istnieje zbiór Łuzina ani zbiór Sierpińskiego. Niemniej, jeśli do modelu teorii mnogości V takiego że $V \models$ **CH** dodamy ω_2 niezależnych liczb Cohena $\mathcal{C}_{\omega_2} = \{c_\xi \in 2^\omega : \xi < \aleph_2\}$, to w rozszerzeniu $V[\mathcal{C}_{\omega_2}]$ liczby te stanowią zbiór Łuzina mocy $\aleph_2 = \mathfrak{c}$. Więcej, zbiór $\mathcal{C}_{\omega_1} = \{c_\xi : \xi < \aleph_1\} \notin \mathcal{M}$ nie jest zbiorem pierwszej kategorii Baire'a o mocy równej $\aleph_1$ (mniejszej od continuum) i nie jest mierzalny w sensie Baire'a. Analogicznie dodając do modelu $V \models$ **CH**, $\aleph_2$ niezależnych liczb Solovay'a otrzymujemy w rozszerzeniu generycznym, zbiór niemierzalny na prostej rzeczywistej w sensie Lebesgue'a mający moc mniejszą niż continuum.

W pracy [Ku] Kazimierz Kuratowski udowodnił przy założeniu **CH** , że dla każdej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ parami rozłącznych zbiorów pierwszej kategorii takiej, że $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{M}$ istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma mnogościowa nie jest mierzalna w sensie Baire'a.

Lew Bukovski udowodnił w pracy [Bu] analogiczne twierdzenie bez założenia hipotezy continuum. Twierdzenie to jest prawdziwe dla partycji prostej rzeczywistej na zbiory pierwszej kategorii a także partycji na zbiory miary zero w sensie Lebesgue'a. Dowód przedstawiony przez Bukovskiego wykorzystywał nieelementarną metodę ultrapotęgi generycznej dla forsingu Cohena w przypadku zbiorów pierwszej kategorii oraz forsingu Solovay'a dodającego liczbę losową w przypadku miary.

Jednym z szeroko znanych twierdzeń o niemierzalnych sumach mnogościowych jest następujące twierdzenie, które udowodnili Jan Brzuchowski, Jacek Cichoń, Edward Grzegorek oraz Czesław Ryll-Nardzewski [BCGR]. Twierdzenie to, dotyczy σ-ideałów $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{P}(X)$ z bazą borelowską określonych na przestrzeni polskiej X oraz rodzin punktowo skończonych zbiorów należących do $\mathcal{I}$. Rodzina $\mathcal{B} \subseteq Bor(X) \cap \mathcal{I}$ jest bazą borelowską σ-ideału $\mathcal{I}$, jeżeli dowolny zbiór z ideału jest pokryty przez element z $\mathcal{B}$. Rodzina $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ jes punktowo skończona, jeżeli dla dowolnego punktu $x \in X$ zbiór $\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ jest skończony.

Twierdzenie 2. *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest σ-ideałem na przestrzeni polskiej X z bazą borelowską, zawierającym wszystkie singletony, to dla każdej rodziny punktowo-skończonej $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ takiej, że $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}$, istnieje jej podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, która nie jest $\mathcal{I}$-mierzalna tzn. nie należy do σ-ciała zbiorów generowanego przez σ-ideał $\mathcal{I}$ oraz σ-ciała wszystkich zbiorów borelowskich* $\mathrm{Bor}(X)$.

Dwa ostatnie twierdzenia są dowodliwe w teorii **ZFC** i nie da się ich rozszerzyć na rodziny punktowo-przeliczalne $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$, to znaczy takie, dla których mamy

$$(\forall x \in X)\ (\{A \in \mathcal{A} :\ x \in A\} \in [\mathcal{A}]^{\leq\omega})\ .$$

David Fremlin [Frem] dodając ω_2 niezależnych liczb Cohena do uniwersum konstruowalnego Gödla L, skonstruował punktowo-przeliczalne pokrycie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ zbiorami miary zero, w której każda podrodzina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ma Lebesgowsko mierzalną sumę mnogościową.

W szczególnym przypadku miarowym, do tej pory nie wiadomo, czy z każdej partycji odcinka $[0, 1]$ na zbiory miary Lebesgue'a zero można wybrać podrodzinę, której suma jest całkowicie niemierzalna, tzn. ma miarę wewnętrzną 0 i miarę zewnętrzną 1. Częściowy wynik uzyskali David Fremlin i Stevo Todorćević w pracy [FrTod]. Autorzy pokazują, że z dowolnej partycji odcinka $[0, 1]$ na zbiory miary 0 oraz dla dowolnego $\epsilon > 0$ można wybrać podrodzinę, której suma ma miarę wewnętrzną mniejszą niż ϵ oraz miarę zewnętrzną większą niż $1 - \epsilon$.

Szczególnym przypadkiem sum mnogościowych zbiorów, są iloczyny (sumy gdy G jest abelowa) algebraiczne zdefiniowane na grupie $(G, +)$. Niech $A, B \in \mathscr{P}(G)$ będą dowolnymi podzbiorami zadanej grupy. Ich algebraiczną sumę A i B definiujemy następująco:

$$A + B = \{a + b \in G :\ (a, b) \in A \times B\}\ .$$

W autoreferacie będziemy rozważać jedynie nieprzeliczalne abelowe grupy polskie.

Już w 1920 roku Wacław Sierpiński [Sier] udowodnił, że istnieją dwa podzbiory X, Y prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, których suma algebraiczna $X + Y$ nie jest mierzalna w sensie Lebesgue'a.

Marcina Kysiak w pracy [Kys1] udowodnił twierdzenie, które mówi, że jeżeli σ-ideał $\mathcal{I}$ na prostej rzeczywistej zawiera wszystkie singletony oraz para $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ ma własność zbioru doskonałego, to dla dowolnego podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ takiego, że $A+A \notin \mathcal{I}$ istnieje $X \subseteq A$, dla którego $X + X \notin \mathcal{A}$. Para $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ ma własność zbioru doskonałego, jeśli każdy zbiór $B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ zawiera zbiór doskonały. Przykładami takich par są $(\mathcal{N}, \mathcal{LM})$ oraz $(\mathcal{M}, \mathcal{BP})$ (tutaj $\mathcal{LM}$ oznacza σ-algebrę wszystkich podzbiorów prostej rzeczywistej mierzalnych w sensie Lebesgue'a, oraz $\mathcal{BP}$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$ posiadających własność Baire'a). Jako wniosek otrzymujemy twierdzenie Ciesielskiego, Fejzicia, Freilinga [CFF] mówiące, że jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest podzbiorem $\mathbb{R}$, dla którego $A + A$ posiada dodatnią miarę zewnętrzną, to istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki że $X + X$ jest niemierzalny. Z tego że $(\mathcal{M}, \mathcal{BP})$ ma własność zbioru doskonałego mamy również analogiczne twierdzenie dla σ-ideału zbiorów pierwszej kategorii $\mathcal{M}$. W tej samej pracy [CFF], znajdujemy również twierdzenie: jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ spełnia warunek $A + A \notin \mathcal{N}$, to istnieje jego podzbiór miary zero $X \in \mathscr{P}(A) \cap \mathcal{N}$ taki, że $X + X$ jest niemierzalny. Analogiczne twierdzenie zachodzi w przypadku kategorii. Jacek Cichoń wraz z Andrzejem Jaśińskim w pracy [CJ] wykazali prawdziwość następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3. *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest niezmienniczym na przesunięcia σ-ideałem na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ posiadającym bazę ko-analityczną, to następujące dwa warunki są równoważne:*

- $(\exists A, B \in \mathcal{I})\ (A + B \notin \mathcal{I})$
- $(\exists A, B \in \mathcal{I})\ (A + B \notin Bor(\mathbb{R})[\mathcal{I}])$.

Tutaj $Bor(\mathbb{R})[\mathcal{I}]$ jest σ-algebrą generowaną przez wszystkie zbiory borelowskie oraz zbiory z σ-ideału $\mathcal{I}$.

Stosując konstrukcję zbioru Vitalego, Jacek Cichoń wraz z Aleksandrem Kharazishvilim oraz z Bogdanem Węglorzem udowodnili, że jeśli G jest nieprzeliczalną, analityczną właściwą podgrupą prostej rzeczywistej, to istnieje mierzalny oraz także niemierzalny selektor w grupie ilorazowej $\mathbb{R}/G$.

Ważną rolę w teorii mnogości na przestrzeniach polskich, odgrywają tzw. współczynniki kardynalne dla ustalonych rodzin podzbiorów rozważanej przestrzeni. Mając zadaną rodzinę $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ podzbiorów przestrzeni polskiej X, można zdefiniować wspomniane współczynniki kardynalne w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
\operatorname{add}(\mathcal{F}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \ \wedge\ \bigcup\mathcal{A} \notin \mathcal{F}\},\\
\operatorname{non}(\mathcal{F}) &= \min\{|A| : A \subseteq X \ \wedge\ A \notin \mathcal{F}\},\\
\operatorname{cov}(\mathcal{F}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \wedge \bigcup\mathcal{A} = X\},\\
\operatorname{cov}_h(\mathcal{F}) &= \min\{|\mathcal{A}| :\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \wedge (\exists B \in Bor(X) \setminus \mathcal{F})\ (B \subseteq \bigcup \mathcal{A})\},\\
\operatorname{cof}(\mathcal{F}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \ \wedge\ (\forall B \in \mathcal{F})(\exists A \in \mathcal{A})\ \ (B \subseteq A)\},\\
\operatorname{Cof}(\mathcal{F}) &= \min\{|\mathcal{A}| :\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \ \wedge\ (\forall B \in \mathcal{F})(\exists A \in \mathcal{A})\ \ (A \subseteq B)\}.
\end{aligned}$$

Ponadto, następujące dwie liczby kardynalne opisujące najmniejszą moc nieograniczonej i dominującej rodziny (odpowiednio) na przestrzeni Baire'a

$$\mathfrak{b} = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \omega^\omega \wedge (\forall x \in \omega^\omega)(\exists y \in \mathcal{B})\ \neg(y \leq^* x)\}$$

$$\mathfrak{d} = \min\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq \omega^\omega \wedge (\forall x \in \omega^\omega)(\exists y \in \mathcal{D})\ (x \leq^* y)\}$$

(gdzie $f \leq^* g$ oznacza, że $(\exists m \in \omega)(\forall n \geq m)(f(n) \leq g(n)))$, pozostają w związku z poprzednimi współczynnikami dla σ-ideału zbiorów pierwszej kategorii Baire'a, który przedstawia tak zwany **diagram Cichonia**:

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \operatorname{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \operatorname{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \operatorname{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\omega_1 \arrow[r] & \operatorname{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \operatorname{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

oraz

$$\operatorname{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \operatorname{cov}(\mathcal{M})\}, \quad \operatorname{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathfrak{d}, \operatorname{non}(\mathcal{M})\}.$$

W pracy [CKP] Cichoń Kamburelis i Pawlikowski udowodnili, że jeżeli algebra ilorazowa $Bor(X)[I]/I$ jest c.c.c., to $\operatorname{cof}(\mathcal{I}) = \operatorname{Cof}(Bor(X)[\mathcal{I}] \setminus \mathcal{I})$, co daje równość tych współczynników dla σ-ideału $\mathcal{M}$ oraz dla $\mathcal{N}$ na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.

Monografia [BartJud] jak również praca [BJS] jest w dużej mierze poświęcona zagadnieniom, które są ściśle związane z diagramem Cichonia. W szczególności, przedstawiono w nich modele teorii **ZFC**, dla których zachodzą wszystkie dopuszczalne ostre nierówności pomiędzy współczynnikami kardynalnymi w tym diagramie (zakładając jednocześnie że w diagramie występują jedynie dwie liczby kardynalne).

Opis osiągnięcia naukowego

W dalszych rozważaniach stosować będziemy standardową notację teorio-mnogościową. ω jest najmniejszą nieskończona liczbą porządkową, $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta$ będą nieskończonymi liczbami porządkowymi, κ, λ oznaczają nieskończone liczby kardynalne. $\mathscr{P}(X)$ oznacza zbiór potęgowy zbioru X, $[X]^{<\kappa}$ zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X o mocy mniejszej niż κ. Analogicznie definiujemy $[X]^{\leq\kappa}$ oraz $[X]^\kappa$. Ośrodkowa przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią polską, jeśli jest metryzowalna w sposób zupełny. Będziemy rozważać jedynie nieprzeliczalne przestrzenie polskie. Przez $Bor_\tau(X)$ oznaczać będziemy σ-algebrę zbiorów borelowskich na ustalonej przestrzeni topologicznej (X, τ). Jeśli jasno z kontekstu wynika, jakiej używamy topologii, to tę rodzinę oznaczymy przez $Bor(X)$. Przez $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ oznaczać będziemy odpowiednio σ-ideały zbiorów pierwszej kategorii na przestrzeni polskiej, zbiorów miary Lebesgue'a zero (w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$), odpowiednio.

Mówimy że $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{P}(X)$ jest σ-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej X jeżeli zachodzi $(\forall A \in \mathcal{I})(\exists B \in Bor(X) \cap \mathcal{I})\ A \subseteq B$.

Dla ustalonego σ-ideału $\mathcal{I}$ w przestrzeni polskiej X σ-algebrę $Bor(X)[\mathcal{I}]$ generowaną przez rodzinę zbiorów $Bor(X) \cup \mathcal{I}$ nazywamy σ-algebrą zbiorów mierzalnych względem σ-ideału $\mathcal{I}$. Wówczas ta σ-algebra jest postaci $\{B \triangle I :\ (B, I) \in Bor(X) \times \mathcal{I}\}$, gdzie $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną dwóch zbiorów. Podzbiór przestrzeni polskiej jest **$\mathcal{I}$-mierzalny** wtedy i tylko wtedy gdy jest elementem algebry $Bor(X)[\mathcal{I}]$. Podobnie, odwzorowanie które jest $Bor(X)[\mathcal{I}]$-mierzalne będziemy pisać w formie skróconej jako $\mathcal{I}$-mierzalne. Rodzinę $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ nazywamy **$\mathcal{I}$-sumowalną**, jeśli dla każdej podrodziny $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, suma mnogościowa $\bigcup \mathcal{A}$ jest $\mathcal{I}$-mierzalna. Na przykład, każda rodzina zbiorów otwartych na przestrzeni polskiej jest $\mathcal{I}$-sumowalna dla dowolnego σ-ideału z bazą borelowską. Podzbiór prostej rzeczywistej jest $\mathcal{N}$-niemierzalny wtedy i tylko wtedy gdy nie jest mierzalny względem miary Lebesgue'a. Analogicznie, podzbiór ustalonej nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej jest $\mathcal{M}$-niemierzalny wtedy i tylko wtedy gdy nie ma własności Baire'a.

Głównym pojęciem jakie pojawia się w artykułach wchodzących do mojego osiągniecia naukowego jest całkowita niemierzalność.

Definicja 1 (całkowita niemierzalność). *Niech $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{P}(X)$ będzie ustalonym σ-ideałem z bazą borelowską, zawierającym wszystkie singletony w przestrzeni polskiej X. Zbiór $A \in \mathscr{P}(X)$ jest* **całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny** *jeśli*

$$(\forall B \in Bor(X) \setminus \mathcal{I})\ (A \cap B \neq \emptyset \wedge A^c \cap B \neq \emptyset).$$

Na przykład każdy zbiór całkowicie $[X]^{\leq\omega}$-niemierzalny jest zbiorem Bernsteina, każdy zbiór całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalny na prostej rzeczywistej ma wewnętrzną miarę Lebesgue'a zero a zewnętrzną ma miarę pełną (tzn. jego dopełnienie ma miarę wewnętrzną równą zero). Każdy zbiór całkowicie $\mathcal{M}$-niemierzalny nie ma własności Baire'a w dowolnym niepustym zbiorze otwartym.

W przypadku σ-ideału wszystkich zbiorów miary Lebesgue'a zero w przestrzeni euklidesowej, pojęcie całkowitej $\mathcal{N}$-niemierzalności pokrywa się z pojęciem nasyconego zbioru niemierzalnego. Natomiast w przypadku ideału zbiorów pierwszej kategorii, pojęcie zbioru całkowicie $\mathcal{M}$-niemierzalnego dotyczy zbiorów posiadających własność $(*)$, która mówi że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ma własność $(*)$ gdy dla każdego zbioru $B \subseteq \mathbb{R}^n$ posiadającego własność Baire'a jeżeli $B \subseteq A$ lub $B \subseteq A^c$, to B jest zbiorem pierwszej kategorii. Nasycone zbiory niemierzalne jak również zbiory posiadające własność $(*)$ pojawiają się w literaturze i są przedmiotem badań, jak choćby w monografii Marka Kuczmy [Kucz] (rozdział 3.3 Saturated non-measurable sets).

W pracy [H1] uzyskaliśmy relatywnie niesprzeczny z teorią **ZFC** rezultat pokazujący ścisły związek pomiędzy współczynnikami kardynalnymi a całkowitą niemierzalnością dla σ-ideału $\mathcal{I}$.

Twierdzenie 4 ([H1, Thm 3.2]). *Jeśli $\mathcal{I}$ jest σ-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej X oraz $\mathrm{cov}_h(\mathcal{I}) = \mathrm{Cof}(Bor(X)[\mathcal{I}] \setminus \mathcal{I})$, to dla każdej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ takiej, że $X \setminus \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$, która jest punktowo mała tj.*

$$\{x :\in X :\ \bigcup \{A \in \mathcal{A} :\ x \in A\} \notin \mathcal{I}\} \in \mathcal{I},$$

istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna.

Dowód tego twierdzenia jak wiele tego rodzaju twierdzeń jest oparty na indukcji pozaskończonej. Indukcja pozwala na utworzenie podrodziny $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ oraz zbioru $S \subseteq X$ w taki sposób, że dla ustalonej współkońcowej rodziny $\mathcal{F} \subseteq Bor(X) \setminus \mathcal{I}$ i dowolnego zbioru $B \in \mathcal{F}$, zachodzą jednocześnie trzy warunki: $S \cap B \neq \emptyset$, $\bigcup \mathcal{A}' \cap B \neq \emptyset$ oraz $S \cap \bigcup \mathcal{A}' = \emptyset$. Warunek $cov_h(\mathcal{I}) = \mathrm{Cof}(Bor(X)[\mathcal{I}] \setminus \mathcal{I})$ gwarantuje wykonalność takiej konstrukcji.

Zwróćmy uwagę, że przy pewnej konfiguracji współczynników kardynalnych twierdzenie o niemierzalności sum mnogościowych zachodzi w dużej ogólności.

Twierdzenie 5 ([H1, Thm 3.1]). *Niech $\mathcal{I}$ będzie ustalonym σ-ideałem na przestrzeni polskiej X takim, że istnieje zbiór całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny o mocy mniejszej niż $cov_h(\mathcal{I})$. Wtedy dla dowolnej* *rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ takiej, że $X \setminus \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$ istnieje jej podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma mnogościowa $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna.*

Dla σ-ideału podzbiorów pierwszej kategorii na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, prawdą jest, że w rozszerzeniu generic otrzymanym po dodaniu do uniwersum konstruowalnego L, ω_2 niezależnych liczb Cohena $\{c_\xi : \xi < \omega_2\}$ (tutaj $cov(\mathcal{M}) = \omega_2 = \mathfrak{c}$), istnieje podzbiór prostej rzeczywistej, który jest całkowicie $\mathcal{M}$-niemierzalny i jego moc jest mniejsza niż $\mathrm{cov}_h(\mathcal{M})$. Otrzymany zbiór w omawianym generycznym rozszerzeniu ma następującą postać:

$$\{c_\xi + r \in \mathbb{R} : \ \xi < \omega_1 \wedge r \in \mathbb{Q}\}.$$

Podobny argument działa w przypadku miary, gdy dodamy ω_2 niezależnych liczb losowych do uniwersum Gödla L.

Twierdzenie to znalazło zastosowanie w pracy Yulii Kuznetsovej [Kuzn], w której zostały poruszane zagadnienia z analizy harmonicznej. Kuznetsova, zadała pytanie, czy dla każdego zbioru $A \in \mathcal{N}$ miary zero na prostej rzeczywistej, istnieje jego podzbiór $B \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $A+B$ jest niemierzalny. W każdym modelu, w którym założenia Twierdzenia 4 dla ideału $\mathcal{N}$ na prostej rzeczywistej jest prawdziwe (np. w modelu otrzymanym przez dodanie ω_2 liczb Solovay'a do uniwersum konstruowalnego) odpowiedź na pytanie Kuznetsovej jest pozytywna. Jako wniosek otrzymujemy, że każdy mierzalny homomorfizm pomiędzy lokalnie zwartą grupą a grupą topologiczną jest ciągły.

Twierdzenie 4 posłużyło do znajdowania niemierzalnych sum dla pewnych rodzin zbiorów w abelowych grupach polskich względem niezmienniczych na przesunięciaσ-ideałów. Niech $(G, +)$ będzie ustaloną abelową grupą polską. Wtedy ideał $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{P}(G)$ jest niezmienniczym na przesunięcia na G jeśli dla dowolnych $A \in \mathcal{I}$, $g \in G$ mamy $g + A = \{g + a \in G : a \in A\} \in \mathcal{I}$. Powiemy, że zbiór $C \subseteq G$ jest zbiorem $\mathcal{I}$-Gruenhage'a, jeżeli dla dowolnego zbioru $B \in Bor(G)[\mathcal{I}] \setminus \mathcal{I}$ oraz dowolnego zbioru $T \in [G]^{<\mathfrak{c}}$ zbiór $B \setminus (C + T)$ jest niepusty. Darji i Keleti [DK] udowodnili że, jeżeli $C \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym o wymiarze pakowania (nazywamy też wymiarem pakującym) $dim_p(C) < 1$, to dla $T \in [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$ $\mathbb{R} \neq T + C$. Dzięki temu twierdzeniu, nietrudno pokazać, że klasyczny zbiór Cantora C jest zbiorem $\mathcal{N}$-Gruenhage'a,

Twierdzenie 6 ([H1, Thm 5.2])**.** *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest niezmienniczymym na przesunięcia σ-ideałem z bazą borelowską na abelowej grupie polskiej $(G, +)$, to dla każdego zbioru $C \subseteq G$, dla którego $C \cup -C$ jest zbiorem $\mathcal{I}$-Gruenhage'a, istnieje $P \subseteq G$, taki że $P + C$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym w G.*

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystaliśmy fakt, że dla symetrycznej relacji

$$R = \{(x, y) \in G : \ x - y \in C \vee y - x \in C\},$$

rodzina $\mathcal{A} = \{R[x] \in \mathcal{I} : \ x \in G\}$ spełnia założenia twierdzenia 4.

Zachodzi naturalne pytanie, czy tezę w powyższym twierdzeniu, można wzmocnić do warunku $P \subseteq C$. Odpowiedź jest pozytywna w przypadku klasycznego zbioru Cantora. Tutaj z pomocą przyszła metoda ultrafiltru, omówiona we wstępie tego autoreferatu.

Twierdzenie 7 ([H1, Cor 5.10])**.** *Jeżeli C jest klasycznym zbiorem Cantora, to istnieje jego podzbiór $P \subseteq C$ dla którego suma kompleksowa $P + C$ jest zbiorem niemierzalnym w sensie Lebesgue'a.*

Korzystając z faktu, że każdy nieprzeliczalny zbiór borelowski ma moc $\mathfrak{c}$, otrzymamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8 ([H1, Thm 4.1])**.** *Jeżeli X jest nieprzeliczalną przestrzenią polską, rodzina $\mathcal{A} \subseteq [X]^{\leq\omega}$ jest punktowo-przeliczalna (tzn. dla każdego $x \in X$ $\{A \in \mathcal{A} : \ x \in A\} \in [\mathcal{A}]^{\leq\omega}$) oraz $\bigcup \mathcal{A} = X$, to istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ taka, że $\bigcup \mathcal{A}'$ jest zbiorem Bernsteina.*

Zauważmy, że jeśli $\mathfrak{c}$ jest regularną liczbą kardynalną, to warunek punktowej przeliczalności rodziny $\mathcal{A}$ można zastąpić warunkiem, $|\{A \in \mathcal{A} : \ x \in A\}| < \mathfrak{c}$ dla każdego $x \in X$. Warunku tego nie można uogólnić na $\mathfrak{c}$-punktowe rodziny. Mianowicie, jeśli zachodzi **CH**, to istnieje sumowalna rodzina

$\mathcal{A} \subseteq [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ pokrywająca prostą rzeczywistą $\mathbb{R}$, tzn. taka, że suma mnogościowa dowolnej podrodziny jest w σ-ciele $Bor(\mathbb{R})[[\mathbb{R}]^{\leq\omega}] = Bor(\mathbb{R})$ generowanym przez wszystkie zbiory borelowskie $Bor(X)$ i σ-ideał wszystkich podzbiorów przeliczalnych. Co więcej, dla każdej nieprzeliczalnej podrodziny $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ mamy $\bigcup \mathcal{A}' = \mathbb{R}$ w pozostałym przypadku $\bigcup \mathcal{A}'$ jest zbiorem przeliczalnym.

Twierdzenie 4.4 z tej samej pracy [H1], ukazuje związek sumowalności rodzin zbiorów domkniętych na przestrzeni polskiej z rangą Cantora-Bendixona. Niech $A \subseteq X$ będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni topologicznej X. Przez A' oznaczymy zbiór wszystkich punktów kondensacji zbioru A. Przez indukcję pozaskończoną definiujemy A^α w sposób następujący:

$$A^\alpha = \begin{cases} (A^\beta)' & \text{jeśli } \alpha = \beta + 1 \\ \bigcap\{A^\xi : \xi < \alpha\} & \text{jeśli } \alpha \text{ jest liczbą graniczną.} \end{cases}$$

Twierdzenie 9 ([H1, Thm 4.4])**.** *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest σ-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej X. Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ będzie $\mathcal{I}$-sumowalną rodziną przeliczalnych zbiorów domkniętych o ograniczonej, przeliczalnej randze Cantora-Bendixona tzn.*

$$(\exists \alpha < \omega_1)(\forall A \in \mathcal{A})\ (A^\alpha = \emptyset).$$

Wtedy $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$.

Wnioskiem z tego twierdzenia jest fakt, że jeśli $\mathcal{A}$ jest rodziną przeliczalnych zbiorów domkniętych o przeliczalnej, ograniczonej randze Cantora-Bendixona, oraz $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}$, to istnieje jej podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma $\bigcup \mathcal{A}'$ jest $\mathcal{I}$-niemierzalna.

Wraz z Szymonem Żeberskim rozważaliśmy w pracy $[H2]$, problem istnienia podrodzin dowolnych rodzin zbiorów z ustalonego σ-ideału, których suma mnogościowa jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna. Otrzymane wyniki dotyczą takich rodzin, dla których istnieje regularna parametryzacja w sensie deskryptywnej złożoności. W tym celu wprowadzimy następującą notację. Niech $F \subseteq X \times Y$ będzie ustaloną relacją. Wtedy definiujemy dla każdego $x \in X$ oraz $y \in Y$

$$F_x = \{v \in Y :\ (x, v) \in F\} \text{ oraz } F^y = \{u \in X :\ (u, y) \in F\}$$

i odpowiednio $\pi_X[F] = \bigcup\{F^y :\ y \in X\}$ i $\pi_Y[F] = \bigcup\{F_x :\ x \in X\}$ rzuty relacji F na przestrzeń X, Y odpowiednio. Jeżeli $T \subseteq Y$, to $F^{-1}[T] = \{x \in X :\ F_x \cap T \neq \emptyset\}$.

Niech będzie dana ustalona partycja π przestrzeni polskiej X. π-nasyceniem zbioru $A \subseteq X$ nazywamy zbiór

$$A^* = \bigcup\{E \in \pi :\ E \cap A \neq \emptyset\}.$$

Partycja π jest borelowsko mierzalna jeśli π-nasycenie każdego zbioru otwartego jest zbiorem borelowskim. π jest silnie borelowsko mierzalna gdy π-nasycenie dowolnego zbioru domkniętego jest zbiorem borelowskim. Każdy otwarty zbiór w przestrzeni polskiej jest przeliczalną sumą zbiorów domkniętych, co implikuje fakt, że każda partycja silnie borelowsko mierzalna jest borelowsko mierzalna. Pojęcie silnej borelowskiej mierzalności pozwala na znalezienie podrodzin o sumach całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnych w dość szerokiej klasie partycji przestrzeni polskiej na zbiory domknięte z ustalonego σ-ideału $\mathcal{I}$.

Twierdzenie 10 ([H2, Thm 2.1])**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie σ-ideałem z bazą borelowską i własnością $\mathcal{I}$-dodatniego zbioru doskonałego na przestrzeni polskiej X tzn. takim że*

$$(\forall B \in Borel(X) \setminus \mathcal{I})(\exists F \in Clo(X))\ \ F \subseteq B \wedge F \notin \mathcal{I}.$$

Jeżeli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ jest silnie borelowską mierzalną partycją X na zbiory domknięte, to istnieje $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ o sumie całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnej.

Na mocy twierdzenia 4 wystarczy udowodnić, że $cov_h(\mathcal{I}) = 2^\omega$. W tym celu wybieramy zbiór doskonały F spoza ideału zawarty w ustalonym zbiorze borelowskim $B \in Bor(X) \setminus \mathcal{I}$. Następnie zauważamy, że $\pi = \{E \cap F :\ E \in \mathcal{F}\}$ jest silnie borelowsko mierzalną partycją F, a więc borelowsko mierzalną. Fakt ten pozwala na zastosowanie twierdzenia Kuratowskiego Ryll-Nardzewskiego o selektorze. Niech S będzie borelowskim selektorem partycji π. Wtedy $|S| = \mathfrak{c}$, (gdyby był zbiorem przeliczalnym to F byłby zawarty w przeliczalnej sumie elementów partycji π, więc $F \in \mathcal{I}$ byłby w ideale, co prowadzi do sprzeczności, że $F \notin \mathcal{I}$).

Twierdzenie to przenosi się na przypadek grup polskich w sposób następujący.

Wniosek 1. *Załóżmy że $(G, +)$ jest dowolną abelową grupą polską. $\mathcal{I} \subseteq P(G)$ będzie niezmienniczym na przesunięcia σ-ideałem z bazą borelowską na G o następującej własności*

$$(\forall B \in Bor(G) \setminus \mathcal{I})(\exists P \in Perf(G) \setminus \mathcal{I})(P \subseteq B).$$

Niech $H < G$ będzie podgrupą, będącą zbiorem doskonałym z ideału $\mathcal{I}$. Wtedy istnieje taki zbiór translacji $T \subseteq G$, że $T + H$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym w grupie G.

Następny wynik uzyskany w omawianej pracy dotyczy mierzalnych odwzorowań pomiędzy przestrzeniami względem ustalonych σ-ideałów określonych na tych przestrzeniach.

Twierdzenie 11 ([H2, Thm 2.2])**.** *Niech $[X]^{\leq\omega} \subseteq \mathcal{I}$ będzie σ-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej X i $f : X \to Y$ jest $\mathcal{I}$-mierzalnym odwzorowaniem z X do przestrzeni topologicznej Y, takim, że dla dowolnego $y \in Y$ zachodzi $f^{-1}[\{y\}] \in \mathcal{I}$. Wtedy istnieje podzbiór $T \subseteq Y$ taki, że $f^{-1}[T]$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym.*

Bez straty ogólności można założyć, że funkcja jest borelowsko mierzalna, Wtedy dla każdego zbioru borelowskiego $B \in Bor(X) \setminus \mathcal{I}$, rzut na przestrzeń X zbioru $(B \times Y) \cap f$ jest analityczny a więc jest przeliczalny albo ma moc $\mathfrak{c}$. Gdyby był przeliczalny, to B dałby się nakryć przeliczalną ilością zbiorów z $\mathcal{I}$, co jest niemożliwe. Tak więc $cov_h(\{f^{-1}[\{y\}] :\ y \in Y\}) = \mathfrak{c}$, co na mocy twierdzenia 4 daje tezę twierdzenia 11.

Powyższy wynik, przenosi się na multifunkcje.

Twierdzenie 12 ([H2, Thm 2.3])**.** *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest c.c.c. σ-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej X, który zawiera wszystkie singletony. Niech $F : X \to Y$ będzie $\mathcal{I}$-mierzalną multifunkcją taką, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $F(x) \in [Y]^{<\omega}$. Wtedy istnieje $T \subseteq Y$ taki, że $F^{-1}[T]$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny.*

Dowód tego twierdzenia opiera się na zastosowaniu twierdzenia Kuratowskiego – Ryll-Nardzewskiego oraz następującego twierdzenia:

Twierdzenie 13. *Jeśli $\mathcal{I}$ jest c.c.c. σ-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej X oraz istnieje rodzina zbiorów $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ taka że*

- *$\mathcal{F}$ jest punktowo-skończona,*
- $(\forall B \in Bor(X) \setminus \mathcal{I})(B \subseteq [\bigcup \mathcal{F}]_{\mathcal{I}} \longrightarrow |\{F \in \mathcal{F} :\ F \cap B \neq \emptyset\}| = \mathfrak{c})$,

to istnieje podrodzina $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, której suma $\bigcup \mathcal{F}'$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna w otoczce borelowskiej $[\bigcup \mathcal{F}]_{\mathcal{I}}$.

Tutaj dla każdego $A \in \mathscr{P}(X)$ mamy $[A]_{\mathcal{I}} = X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, gdzie $\mathcal{A} \subseteq Bor(X) \setminus \mathcal{I}$ jest maksymalnym antyłańcuchem borelowskich zbiorów spoza σ-ideału $\mathcal{I}$ rozłącznych ze zbiorem A. Punktowa skończoność rodziny $\mathcal{F}$ gwarantuje nam możliwość znalezienia podrodziny $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ takiej że $cov_h(\mathcal{F}_0) = \mathfrak{c}$ o wspólnej borelowskiej nakrywce, tzn. $[\bigcup \mathcal{F}_0]_{\mathcal{I}} = [\bigcup \mathcal{F}]_{\mathcal{I}}$. Następnie przez indukcje pozaskończoną, znajdujemy podrodzinę $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_0$, która daje tezę naszego pomocniczego twierdzenia 13.

Bez straty ogólności, możemy założyć, że nasza multifunkcja F jest borelowsko mierzalna. Jeśli wybierzemy dowolny borelowski zbiór B spoza $\mathcal{I}$, to stosując twierdzenie Kuratowskiego – Ryll-Nardzewskiego o selektorach do funkcji $F \restriction B$ znajdujemy borelowski selektor $s \subseteq F \restriction B$, którego rzut na przestrzeń Y (z powodu punktowej skończoności $\mathcal{F}$) jest nieprzeliczalny, a więc ma moc continuum $\mathfrak{c}$. Tak więc drugie założenie w pomocniczym twierdzeniu również jest spełnione, co pozwala znaleźć żądaną podrodzinę $\mathcal{F}'$.

Jeżeli założymy że, rozważany σ-ideał $\mathcal{I}$ z bazą borelowską jest c.c.c., to $Bor(X)[\mathcal{I}]$ zawiera wszystkie zbiory analityczne. Wtedy z twierdzenia 12 otrzymujemy następujący rezultat.

Twierdzenie 14 ([H2, Thm 2.4])**.** *Niech X i Y będą przestrzeniami polskimi oraz $\mathcal{I}$ c.c.c. σ-ideałem z bazą borelowską na X. Niech $F \subseteq X \times Y$ będzie analityczną relacją na produkcie $X \times Y$ taką, że*

(1) $(\forall y \in Y)\ (F^y \in \mathcal{I})$,
(2) $X \setminus \pi_X(F) \in \mathcal{I}$,
(3) $(\forall x \in X)\ \ (|F_x| < \omega)$.

Wtedy istnieje $T \subseteq Y$, dla którego $F^{-1}[T]$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny.

Opisane powyżej trzy twierdzenia są dowodliwe w teorii **ZFC**, niemniej zostały nałożone dodatkowe warunki związane z regularnością rodzin zbiorów z omawianego σ-ideału $\mathcal{I}$. Zachodzi naturalne pytanie, czy teza tych twierdzeń jest prawdziwa w przypadku ogólnym. To znaczy, czy dla dowolnej rodziny punktowo-skończonej $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ takiej, że $(\bigcup \mathcal{A})^c \in \mathcal{I}$, istnieje jej podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ taka, że $\bigcup \mathcal{A}'$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym. Nie istnienie liczby quasi-mierzalnej nie większej niż $\mathfrak{c}$, daje odpowiedź pozytywną otrzymaną w pracy $[H6]$.

Powiemy, że nieprzeliczalna liczba kardynalna κ jest **quasi-mierzalna** jeśli istnieje κ addytywny ideał $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$, który jest *c.c.c.*. tzn. każdy antyłańcuch w algebrze $\mathscr{P}(\kappa)/\mathcal{I}$ jest co najwyżej przeliczalny.

Główny wynik we wspólnej pracy z Szymonem Żeberskim $[H6]$ jest następujący

Twierdzenie 15 ([H6, Thm 3.3])**.** *Załóżmy że, nie istnieje liczba quasi-mierzalna $\kappa \leq \mathfrak{c}$. Wtedy jeśli $\mathcal{I}$ jest c.c.c. σ-ideałem na przestrzeni polskiej X i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ jest punktowo-skończonym pokryciem X, to istnieje rodzina $\{\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{A} : \xi < \omega_1\}$ parami rozłącznych podrodzin rodziny $\mathcal{A}$ taka, że każda mnogościowa suma $\bigcup \mathcal{A}_\xi$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna w przestrzeni X.*

Dowód tego twierdzenia opiera się na dwóch lematach z pracy Szymona Żeberskiego [Zeb] i twierdzeń 2.1 i 2.2, które udowodniliśmy w pracy $[H6]$.

Lemat 1 ([Zeb], Lemma 3.4)**.** *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest c.c.c. σ-ideałem na przestrzeni polskiej X oraz $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ jest rodziną punktowo-skończoną, taką że $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}$ i algebra $\mathscr{P}(\mathcal{A})/\mathcal{I}$ nie ma własności c.c.c., to istnieje nieprzeliczalna kolekcja parami rozłącznych podrodzin $\{\mathcal{A}_\xi : \xi < \omega_1 \wedge \mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{A}\}$ o tej samej borelowskiej nakrywce spoza $\mathcal{I}$, tzn. $[\bigcup \mathcal{A}_\xi]_\mathcal{I} = [\bigcup \mathcal{A}_\eta]_\mathcal{I} \neq 0$ dla każdego $\xi, \eta < \omega_1$.*

Lemat 2 ([Zeb], Lemma 3.5)**.** *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest c.c.c. σ-ideałem na przestrzeni polskiej X oraz $\mathcal{A}$ jest dowolnym punktowo-skończonym pokryciem X, to zbiór*

$$\{A \in \mathcal{A} :\ (\exists B \in Bor(X) \setminus \mathcal{I})\ (B \subseteq A)\}$$

jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

Twierdzenie 16 ([H6, Thm 2.1])**.** *Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ będzie pokryciem przestrzeni polskiej X takim, że dla każdego zbioru $D \in [X]^{<\mathfrak{c}}$ suma mnogościowa $\bigcup_{x \in D} \bigcup \{A \in \mathcal{A} :\ \ x \in A\}$ nie zawiera żadnego zbioru borelowskiego $B \in Bor(X) \setminus \mathcal{I}$. Wtedy rodzina $\mathcal{A}$ zawiera $\mathfrak{c}$ wiele parami rozłącznych podrodzin $\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{A}$ dla $\xi < \mathfrak{c}$ takich, że suma każdej z nich $\bigcup \mathcal{A}_\xi$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna w X.*

Powyższe twierdzenie daje taki wynik, który bezpośrednio zostanie użyty w dowodzie głównego rezultatu z pracy $[H6]$.

Twierdzenie 17 ([H6, Thm 2.2])**.** *Załóżmy że nie istnieje quasi-mierzalna $\kappa < \mathfrak{c}$. Jeżeli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ jest rodziną podzbiorów przestrzeni polskiej X, że dla każdego $x \in X$, $|\{A \in \mathcal{A} :\ x \in A\}| < \mathfrak{c}$ oraz $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}$, to wtedy $\mathscr{P}(\kappa)/\mathcal{I}$ nie jest c.c.c..*

Podamy teraz szkic dowodu twierdzenia 15. Tworzymy przez indukcję pozaskończoną parami rozłączne zbiory borelowskie $\{B_\sigma :\ \sigma < \gamma\}$ spoza $\mathcal{I}$ oraz rodzinę $\mathcal{A}^\sigma_\xi : \xi < \omega_1$ taką, że

- $(\forall \xi, \eta < \omega_1)(\xi \neq \eta \longrightarrow \mathcal{A}^\sigma_\xi \cap \mathcal{A}^\sigma_\eta = \emptyset)$
- $(\forall \xi < \omega_1)\ (B^\sigma \in \ulcorner \bigcup \mathcal{A}^\sigma_\xi \setminus \bigcup_{\rho<\sigma} B_\rho \urcorner_\mathcal{I})$

gdzie dla dowolnego $Y \subseteq X$, $\ulcorner Y \urcorner_{\mathcal{I}}$ jest zbiorem wszystkich elementów $\subseteq_{\mathcal{I}}$-minimalnych w zbiorze $\{B \in Bor(X) : \ Y \subseteq_{\mathcal{I}} B\}$ uporządkowanym częściowo przez relację $\subseteq_{\mathcal{I}}$ (tzn. $u \subseteq_{\mathcal{I}} v \longleftrightarrow u \setminus v \in \mathcal{I}$). Własność *c.c.c.* σ-ideału $\mathcal{I}$ gwarantuje to, że $\ulcorner Y \urcorner_{\mathcal{I}}$ jest niepusty. Ta sama własność σ-ideału $\mathcal{I}$ gwarantuje nam że $\gamma < \omega_1$.

Dla ustalonego $\sigma < \gamma$ niech $\mathcal{A}^\sigma = \{A \setminus \bigcup_{\rho<\sigma} B_\rho : \ A \in \mathcal{A} \setminus \bigcup_{\rho<\sigma} \mathcal{A}^\rho\}$. Jeżeli suma mnogościowa $\bigcup \mathcal{A}^\sigma \in \mathcal{I}$ jest w ideale $\mathcal{I}$, to proces ten jest zakończony. W przeciwnym przypadku, $\bigcup \mathcal{A}^\sigma \notin \mathcal{I}$ i wtedy na mocy twierdzenia 17, $\mathscr{P}(\mathcal{A}^\sigma)/\mathcal{I}$ nie jest *c.c.c.*. Wtedy lemat 1 pozwala znaleźć rodzinę $\{\mathcal{A}^\sigma_\xi : \xi < \omega_1\}$ taką, że dla dowolnych $\xi, \eta < \omega_1$ mamy $[\bigcup \mathcal{A}^\sigma_\xi]_{\mathcal{I}} = [\bigcup \mathcal{A}^\sigma_\eta]_{\mathcal{I}} \neq 0$. Rodzina ta pozwala znaleźć borelowski zbiór B^σ spoza ideału, leżący w $\ulcorner \bigcup \mathcal{A}^\sigma_0 \setminus \bigcup_{\rho<\sigma} B_\rho \urcorner$.

Następnie, dla każdego $\xi < \omega_1$ rodzina $\mathcal{A}'_\xi = \bigcup\{\mathcal{A}^\sigma_\xi : \sigma < \gamma\}$ jest punktowo-skończona o borelowskiej nakrywce równej całej przestrzeni tzn. $[\bigcup \mathcal{A}'_\xi]_{\mathcal{I}} = [\bigcup_{\sigma<\gamma} B^\sigma]_{\mathcal{I}} = X$.

Lemat 2 gwarantuje, że tylko dla przeliczalnie wielu $\xi < \omega_1$ suma mnogościowa $\bigcup \mathcal{A}'_\xi$ zawiera $\mathcal{I}$-dodatni zbiór borelowski. Istnieje więc taka $\beta < \omega_1$, że dla każdego $\xi > \beta$, suma $\bigcup \mathcal{A}'_\xi$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym zbiorem w X.

W każdym modelu **ZFC**, w którym addytywność σ-ideału $\mathcal{I}$ jest równa $\mathfrak{c}$ (np. dla miary i kategorii przy aksjomacie Martina) istnieje rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$, która jest sumowalna, tzn.

$$(\forall \mathcal{C} \in \mathscr{P}(\mathcal{A})) \ \left(\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{I} \vee (\bigcup \mathcal{C})^c \in \mathcal{I}\right).$$

Rodzina ta jest wieżą określoną następująco, jeśli mamy numerację $\mathbb{R} = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, to dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$ definiujemy $A_\alpha = \{x_\xi : \xi < \alpha\}$ i dalej $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Rodzina ta jest punktowo duża, suma mnogościowa gwiazdy $\mathcal{A}(x) = \{A \in \mathcal{A} : \ x \in A\}$ dowolnego punktu $x \in \mathbb{R}$ leży w ko-ideale $\mathcal{I}^*$, tzn. $(\bigcup \mathcal{A}(x))^c \in \mathcal{I}$.

Obserwacja ta była motywacją do podjęcia badań w pracy $[H3]$ nad mierzalnością sum mnogościowych rodzin punktowo dużych. Głównymi wynikami tej pracy są następujące dwa twierdzenia.

Twierdzenie 18 ([H3, Thm 2.1])**.** *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest σ-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej X. Wtedy dla każdej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ spełniającej warunki*

(1) $(\forall x \in X)\ |\mathcal{A}(x)| = \mathfrak{c}$,
(2) $(\forall x, y \in X)(x \neq y \longrightarrow |\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y)| \leq \omega)$,
(3) $cov_h(\mathcal{A}) = \mathfrak{c}$,

istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma $\bigcup \mathcal{A}'$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym,

Twierdzenie 19 ([H3, Thm 2.2])**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie σ-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej X. Wtedy dla każdej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ spełniającej warunki:*

(1) $\bigcup \mathcal{A} = X$,
(2) $(\forall x, y \in X)(x \neq y \longrightarrow |\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y)| \leq \omega)$,
(3) $cov_h(\mathcal{A}) = \mathfrak{c}$,

istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma $\bigcup \mathcal{A}'$ jest zbiorem $\mathcal{I}$-niemierzalnym.

W pozostałej części pracy, podałem definiowalne przykłady zastosowań powyższych twierdzeń. Przykłady te, są konstruowalne w każdym modelu teorii **ZFC**. Do tego celu wprowadziłem pojęcie tzw. szczupłego zbioru doskonałego względem ustalonej rodziny podzbiorów grupy polskiej.

Definicja 2 (doskonały zbiór szczupły)**.** *Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ będzie rodziną na grupie polskiej $(G, +)$ oraz $\mathcal{I}$ będzie niezmienniczym na przesunięcia σ-ideałem z bazą borelowską na G. Mówimy, że zbiór doskonały $P \subseteq X$ jest szczupły względem rodziny $\mathcal{A}$, gdy zachodzą dwa warunki:*

- $(\forall B \in Bor(X) \setminus \mathcal{I})(\exists s \in G)\ (|(s + P) \cap B| = \mathfrak{c})$,
- $(\forall A \in \mathcal{A})(\forall t \in G)\ (|P \cap (t + A)| \leq \omega)$.

Jeżeli rozważymy rodzinę $\mathcal{A}$ wszystkich prostych w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ o wymiarze przynajmniej równym dwa, to sfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^n$ stanowi przykład zbioru szczupłego względem $\mathcal{A}$. Analogicznie, każda prosta $l \subseteq \mathbb{R}^n$ jest przykładem szczupłego zbioru doskonałego względem rodziny wszystkich brzegów n wymiarowych kul w $\mathbb{R}^n$.

Omawiane przykłady dotyczą rodzin podzbiorów płaszczyzny miary zero, których cov_h jest równy $\mathfrak{c}$. Kluczowym rezultatem pozwalającym osiągnąć ten cel, jest Lemat 3.2 w pracy [$H3$], który mówi, że każdy doskonały podzbiór grupy polskiej z miarą Haara, da się wsunąć w każdy zbiór borelowski miary dodatniej w ten sposób, że ich część wspólna ma moc równą $\mathfrak{c}$.

Pokażemy że $cov_h(\mathcal{A}) = \mathfrak{c}$. Niech B będzie dowolnym zbiorem borelowskim o dodatniej mierze Haara. Rozważmy dowolną podrodzinę $\mathcal{A}' \in [\mathcal{A}]^{<\mathfrak{c}}$. Wtedy przekrój tej rodziny z doskonałym zbiorem szczupłym $t + P$ jest mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$ a tralnslacja $t \in G$ jest tak dobrana, że $(t + P) \cap B$ ma moc $\mathfrak{c}$.

Z powyższej obserwacji i twierdzeń 18 i 19 otrzymujemy następujące dwa wnioski.

Wniosek 2 ([H3, Proposition 3.6]). *Niech $\mathcal{I}$ będzie dowolnym niezmienniczym na przesunięcia, z bazą borelowską σ-ideałem na grupie polskiej $(G, +)$ oraz niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ będzie taką rodziną, że*

- *istnieje doskonały zbiór szczupły względem $\mathcal{A}$,*
- $(\forall x \in G)\ (|\mathcal{A}(x)| = \mathfrak{c})$,
- $(\forall x, y \in G)\ (x \neq y \longrightarrow |\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y)| \leq \omega)$.

Wtedy istnieje $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, taka że $\bigcup \mathcal{A}'$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym w G.

Wniosek 3 ([H3, Proposition 3.7]). *Niech $\mathcal{I}$ będzie dowolnym niezmienniczym na przesunięcia, z bazą borelowską σ-ideałem na grupie polskiej $(G, +)$ oraz niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ będzie taką rodziną, że*

- *istnieje doskonały zbiór szczupły względem $\mathcal{A}$,*
- $\bigcup \mathcal{A} = G$,
- $(\forall x, y \in G)\ (x \neq y \longrightarrow |\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{A}(y)| \leq \omega)$.

Wtedy istnieje $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, taka że $\bigcup \mathcal{A}'$ jest zbiorem $\mathcal{I}$-niemierzalnym w G.

Stosując wniosek 3 otrzymujemy kolejny wniosek

Wniosek 4. *Jeżeli $n \geq 2$ oraz $\mathcal{L}$ jest dowolną rodziną prostych w $\mathbb{R}^n$ taką, że $\bigcup \mathcal{L} = \mathbb{R}^n$, to istnieje jej podrodzina $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, taka, że $\bigcup \mathcal{L}'$ jest zbiorem niemierzalnym w sensie Lebesgue'a.*

Rodzinę prostych w przestrzeni euklidesowej można zastąpić rodziną sfer.

Twierdzenie 20 ([H3, Thm 3.10]). *Dla każdej rodziny okręgów o stałym promieniu, pokrywającej płaszczyznę, istnieje jej podrodzina, której suma mnogościowa jest niemierzalna w sensie Lebesgue'a oraz taka podrodzina, której suma nie ma własności Baire'a. Ponadto, jeśli założymy że każdy punkt na płaszczyźnie jest pokryty przez $\mathfrak{c}$ wiele okręgów z naszej rodziny, to można znaleźć jej podrodzinę, której suma jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna, dla $\mathcal{I} \in \{\mathcal{N}, \mathcal{M}\}$.*

Przechodząc z płaszczyzny do n wymiarowej przestrzeni euklidesowej, możemy udowodnić, że:

Twierdzenie 21 ([H3, Thm 3.11]). *Niech $\mathcal{A} \subseteq \{S(x, r) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) : x \in \mathbb{R}^n \wedge r > 0\}$ będzie dowolną rodziną $n - 1$ wymiarowych sfer w $\mathbb{R}^n$ która spełnia warunek*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ (\{y \in \mathbb{R}^n : (\exists r > 0)\ (x \in S(y, r) \wedge S(y, r) \in \mathcal{A})\} \text{ ma miarę dodatnią}).$$

Wtedy istnieje $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ taka że $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalny w $\mathbb{R}^n$.

Inspiracją artykułu [$H5$] napisanego wspólnie z Szymonem Żeberskim, były omawiane we wstępie prace Sierpińskiego [Sier], Cichonia i Jasińskiego [CJ], Kysiaka [Kys1] oraz praca będąca autorstwem Ciesielskiego, Freilinga i Fejzicia [CFF], które dotyczyły niemierzalności sum algebraicznych na odcinku albo w przestrzeni Cantora.

W pracy [$H5$] podjęliśmy próbę zastąpienia operacji dodawania przez w miarę ogólne relacje określone na przestrzeniach polskich. Jeden z głównych wyników ma dość techniczne sformułowanie. Pozwala jednak uzyskać szereg naturalnych zastosowań.

Twierdzenie 22 ([H5, Thm 3.4]). *Niech T będzie dowolnym zbiorem, $\mathcal{I}$ będzie σ-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej X. Niech $\lambda < \mathfrak{c}$ albo $\lambda = \mathfrak{c} = \mathrm{cof}(\mathfrak{c})$, niech $(R_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{c}} \in \mathscr{P}(T^2 \times X)$ będzie ciagiem relacji długości $\mathfrak{c}$ takim, że dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$*

(1) $\{x: |R_\alpha^{-1}(x)| \neq \mathfrak{c}\} \in \mathcal{I}$,
(2) $|R_\alpha \cap S| < \lambda$ *dla każdego* S *postaci* $\Delta, \{a\} \times T \times \{x\}, T \times \{a\} \times \{x\}$, *gdzie* $a \in T, x \in X$,
(3) $(\forall B \in Bor(X) \setminus \mathcal{I})(\exists a \in T)\ (|R_\alpha^{-1}(B) \cap \{a\} \times T| = \mathfrak{c})$,
(4) $(\forall (a,b) \in T^2)\ (|R_\alpha(a,b)| < \lambda)$.

Wtedy istnieje $A \subseteq T$ *taki, że dla dowolnega* $\alpha < \mathfrak{c}$*, obraz* $R_\alpha(A^2)$ *jest całkowicie* $\mathcal{I}$*-niemierzalny w* X*.*

Twierdzenie to udowodniliśmy stosując indukcję pozaskończona. Z twierdzenia 22 wynikają dwa rezultaty dotyczące miary i kategorii odpowiednio.

Wniosek 5 ([H5, Cor 3.3])**.** *Istnieje taki podzbiór* A *prostej rzeczywistej* $\mathbb{R}$*, że dla każdej funkcji* $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *klasy* C^1*, która jest "na", obraz* $f[A \times A]$ *jest zbiorem całkowicie* $\mathcal{N}$*-niemierzalnym.*

W dowodzie tego wniosku, prócz wspomnianego twierdzenia, używany jest fakt, oznaczony w $[H5]$ jako Claim 3.1, który mówi że, jeśli funkcja rzeczywista klasy C^1 określona na płaszczyźnie jest "na", to przeciwobraz borelowskiego zbioru miary dodatniej przez tą funkcję jest zbiorem borelowskim o dodatniej, dwuwymiarowej mierze Lebesgue'a.

Wniosek 6 ([H5, Cor 3.4])**.** *Istnieje taki podzbiór* A *prostej rzeczywistej* $\mathbb{R}$*, że dla każdej funkcji* $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *klasy* C^1*, która jest "na" o niezerowych pochodnych cząstkowych poza zbiorem pierwszej kategorii, obraz* $f[A \times A]$ *jest zbiorem całkowicie* $\mathcal{M}$*-niemierzalnym.*

W pracy [CFF], Ciesielski, Freiling oraz Fejzić skonstruowali przykład doskonałego zbioru miary zero C takiego, że $C+C$ jest odcinkiem oraz suma algebraiczna $A+A$ nie może być zbiorem Bernsteina dla dowolnego $A \subseteq C$. Kluczową własnością tego zbioru jest fakt że, każdy punkt $x \in C + C$ daje się przedstawić na skończenie wiele sposobów. Okazuje się, że zbioru Bernsteina z tezy poprzedniego twierdzenia nie da się zastąpić zbiorem całkowicie I-niemierzalnym o czym świadczy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 23 ([H5, Thm 3.5])**.** *Niech* T_1, T_2 *będą dowolnymi zbiorami oraz* $\mathcal{I}$ *będzie* σ*-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej* X*. Wtedy dla każdej funkcji* $f: T_1 \times T_2 \to X$ *spełniającej warunki*

(1) f *jest "na",*
(2) $\{x \in X: \omega < |f^{-1}(x)|\} \in \mathcal{I}$,
(3) *dla każdego zbioru borelowskiego* $B \in Bor(X) \setminus \mathcal{I}$ *mamy*

$$|\{a \in T_1: \ |\{a\} \times T_2 \cap f^{-1}(B)| = \mathfrak{c}\}| = \mathfrak{c},$$

istnieją zbiory $A \subseteq T_1$, $B \subseteq T_2$*, dla których obraz* $f[A \times B]$ *jest całkowicie* $\mathcal{I}$*-niemierzalny.*

Ponadto, jeśli $T_1 = T_2$*, to istnieje* $A \subseteq T_1$*, dla którego* $f[A \times A]$ *jest zbiorem całkowicie* $\mathcal{I}$*-niemierzalnym w* X*.*

Zastosowanie twierdzenia Mycielskiego oraz przed chwilą omawianego daje następujący wynik.

Wniosek 7 ([H5, Cor 3.5])**.** *Niech* $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ *oraz* $\mathcal{I}_3$ *będą* σ*-ideały z bazą borelowską na przestrzeniach polskich* X_1, X_2, X_3 *odpowiednio. Załóżmy że, funkcja* $f: X_1 \times X_2 \to X_3$ *spełnia warunki*

- f *jest "na",*
- $f^{-1}(z)$ *jest co najwyżej przeliczalny poza zbiorem z* σ*-ideału* $\mathcal{I}_3$*,*
- *dla każdego zbioru borelowskiego* $B \subseteq X_3$ *spoza* $\mathcal{I}_3$*, istnieje zbiór* $W \in Bor(X_1 \times X_2) \setminus (\mathcal{I}_1 \otimes \mathcal{I}_2)$*, taki że* $W \subseteq f^{-1}(B)$*.*

Wtedy istnieją zbiory $A \subseteq X_1$, $B \subseteq X_2$*, dla których obraz* $f[A \times B]$ *jest całkowicie* $\mathcal{I}_3$*-niemierzalny w* X_3*.*

Praca Cichonia [C] stała się inspiracją do podjęcia badań tzw. uogólnionych zbiorów Łuzina. Jak wspomnieliśmy we wstępie tego referatu, $\mathbf{MA} + \neg\mathbf{CH}$ nie dopuszcza istnienia Luzina rozumianego w klasycznym sensie, niemniej jednak w każdym takim modelu istnieją zbiory $\mathfrak{c}$-Łuzina. Dla ustalonej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej κ zbiór $A \subseteq X$ w ustalonej przestrzeni polskiej jest κ-zbiorem Łuzina jeśli $\kappa \leq |A|$ oraz przekrój z każdym zbiorem pierwszej kategorii Baire'a jest mocy mniejszej niż κ. Zbiór ten nie jest zbiorem pierwszej kategorii Baire'a a nawet więcej, nie jest zbiorem mierzalnym w sensie Baire'a. Jeżeli kofinalność liczby κ jest nieprzeliczalna, to rodzina $[X]^{<\kappa}$ stanowi właściwy σ-ideał zawierający wszystkie singletony. Zbiór $A \subseteq X$ jest zbiorem κ-Łuzina wtedy i tylko wtedy gdy $A \notin \mathcal{M}$ oraz dla każdego $Y \in \mathcal{M}$ mamy $A \cap Y \in [X]^{<\kappa}$. To spostrzeżenie prowadzi do pojęcia zbioru $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina dla ustalonych σ-ideałów $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ na przestrzeni polskiej X.

Definicja 3. *Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będa ustalonymi σ-ideałami na przestrzeni polskiej X. Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy zbiorem $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina jeśli*
- *$A \notin \mathcal{I}$ oraz*
- *$(\forall Y \in \mathcal{I})\ (A \cap Y \in \mathcal{J})$.*

Ponadto, jeśli κ jest ustaloną liczbą kardynalną, to mówimy że $A \subseteq X$ jest zbiorem $(\kappa, \mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina, jeśli moc A jest równa κ oraz A jest zbiorem $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina.

Powiemy że dwa σ-ideały $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ są ortogonalne ($\mathcal{I} \perp \mathcal{J}$) w przestrzeni polskiej X, jesli istnieje taka partycja $X = I \cup J$, że $I \in \mathcal{I}$ oraz $J \in \mathcal{J}$. Klasyczny rozkład Marczewskiego gwarantuje $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$. Jak łatwo zauważyć [*H*7, *Fact* 1.1], jeśli $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ są ortogonalne σ-ideały w X, to istnieje zbiór $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina. Jeśli A jest zbiorem $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina, to nie jest on jednocześnie zbiorem $(\mathcal{J}, \mathcal{I})$-Łuzina.

W pracy [*H*7] napisanej wspólnie z Żeberskim, rozważamy rodziny zbiorów $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$, które są nierównoważne względem ustalonej rodziny funkcji $\mathcal{F} \subseteq X^X$.

Definicja 4. *Niech $\mathcal{F} \subseteq X^X$ będzie rodziną funkcji. Powiemy że zbiory $A, B \subseteq X$ są nierównoważne względem $\mathcal{F}$ jeżeli*
$$(\forall f \in \mathcal{F})\ \big(A \neq B \longrightarrow \neg(f[A] = B \vee f[B] = A)\big).$$

W pracy [*H*7], udowodniliśmy twierdzenie, które jest uogólnieniem znanego twierdzenia Erdösa-Sierpińskiego o dualności.

Twierdzenie 24 (Erdös-Sierpiński)**.** *Przy założeniu* **CH***, istnieje bijekcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taka że*
$$(\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}))\ (A \in \mathcal{M} \longleftrightarrow f[A] \in \mathcal{N}) \wedge (A \in \mathcal{N} \longleftrightarrow f[A] \in \mathcal{M}).$$

Twierdzenie 25 ([H7, Thm 2.1])**.** *Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą dowolnymi σ-ideałami z bazę borelowską. Jeżeli $\kappa = \mathrm{cov}_h(\mathcal{I}) = \mathrm{cof}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{J})$ oraz $\mathcal{F} \in [X^X]^{\leq\kappa}$ jest dowolną rodziną funkcji mocy nie większej niż κ, to istnieje rodzina $\mathcal{A}$ mocy κ parami nierównoważnych zbiorów $(\kappa, \mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina względem $\mathcal{F}$.*

Twierdzenie to prowadzi do następującego wniosku, które spełnione jest np. przy **CH**.

Wniosek 8 ([H7, Cor 2.3])**.** *Jeżeli $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ są σ-ideałami z bazą borelowską takimi że $\mathrm{cov}_h(\mathcal{I}) = \mathrm{non}(\mathcal{J}) = \mathfrak{c}$, to istnieje $\mathfrak{c}$-wiele zbiorów $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina, które są parami nierównoważne względem rodziny wszystkich funkcji $\mathcal{I}$-mierzalnych.*

W przypadku ideałów zbiorów miary zero $\mathcal{N}$ oraz pierwszej kategorii $\mathcal{M}$ otrzymujemy kolejny wniosek.

Wniosek 9 ([H7, Cor 2.4])**.**
- *Jeżeli $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$, to istnieje $\mathfrak{c}$ wiele nierównoważnych zbiorów $(\mathfrak{c}, \mathcal{N}, \mathcal{M})$-Łuzina parami nierównoważnych względem rodziny wszystkich funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a.*
- *Jeżeli $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, to istnieje $\mathfrak{c}$ wiele nierównoważnych zbiorów $(\mathfrak{c}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$-Łuzina parami nierównoważnych względem rodziny wszystkich funkcji mierzalnych w sensie Baire'a.*

W tejże samej pracy [*H*7], badaliśmy również forsingi, które zachowują własność bycia zbiorem $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina dla definiowalnych ideałów $\mathcal{I}, \mathcal{J}$. Rozważaliśmy forsingi definiowalne $\mathbb{P} = Bor(X) \setminus \mathcal{I}$, które dla ideałów $\mathcal{N}$ i $\mathcal{M}$ były badane przez Roberta Solovay'a w pracy [So1]. Główne rezultaty są zawarte w monografii [Zapl]. Mianowicie, forsing $\mathbb{P} = Bor(X) \setminus \mathcal{I}$ jest definiowalny w tym sensie, że każdy generyczny filtr $G \subseteq \mathbb{P}$ jest definiowalny z liczby generycznej dla której istnieje kanoniczna nazwa $\dot{r} \in V^{\mathbb{P}}$ i mamy $V[G] = V[r]$. Dalej, rozważany definiowalny σ-ideał z bazą borelowską posiada absolutne kodowanie borelowskich zbiorów z ideału $\mathcal{I}$, pomiędzy dowolnymi tranzytywnymi modelami teorii **ZFC** $M \subseteq N$ w takim sensie że: dla każdej liczby $x \in \omega^\omega \cap M$

$$M \models "\#x \in Bor(X) \cap \mathcal{I}" \longleftrightarrow N \models "\#x \in Bor(X) \cap \mathcal{I}".$$

Powiemy, że dla tranzytywnego modelu V teorii **ZFC**, definiowalny forsing $\mathbb{P} \in V$ zachowuje własność bycia zbiorem $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina, jesli dla każdego zbioru $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina $A \in V$ w dowolnym rozszerzeniu generycznym $V[G]$, gdzie $G \subseteq \mathbb{P}$ jest filtrem generycznym nad modelem V, zachodzi

$$V[G] \models "A \text{ jest zbiorem}(\mathcal{I}, \mathcal{J})\text{-Łuzina}".$$

Kluczową rolę odgrywają ideały, które mają własność Fubiniego. Powiemy, że σ ideał na przestrzeni polskiej X posiada własność Fubiniego jeżeli spełniony jest następujący warunek:

$$(\forall A \in Bor(X \times X)) \, (\{x \in X : \; A_x \notin \mathcal{I}\} \in \mathcal{I} \longrightarrow \{y \in X : \; A^y \notin \mathcal{I}\} \in \mathcal{I}).$$

Udowodniliśmy następujące twierdzenie dla forsingów *c.c.c.*, związane z zachowywaniem własności uogólnionego zbioru Łuzina.

Twierdzenie 26 ([H7, Thm 3.1])**.** *Niech κ będzie nieprzeliczalną liczbą kardynalną. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ c.c.c. bedą σ-ideałami posiadającymi własność Fubiniego na przestrzeni polskiej X. Załóżmy że, $\mathbb{P}_{\mathcal{I}} = Bor(X) \setminus \mathcal{I}$, $\mathbb{P}_{\mathcal{J}} = Bor(X) \setminus \mathcal{J}$ są definiowalnymyi forsingami. Wtedy forsing $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ zachowuje własność bycia zbiorem $(\kappa, \mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina.*

W szczególności forsing Solovay'a dodający liczbę losową do modelu podstawowego V, zachowuje wszystkie zbiory Sierpińskiego leżące w V. Analogicznie forsing dodający liczbę Cohena zachowuje wszystkie zbiory Łuzina z modelu podstawowego.

Analogiczne twierdzenie udowodniliśmy dla definiowalnych forsingów, zachowujących bazę σ-ideału $\mathcal{I}$.

Twierdzenie 27 ([H7, Thm 3.2])**.** *Niech $(\mathbb{P}, \leq)$ będzie pojęciem forsingu definiowalnego, który zachowuje bazę σ-ideału $\mathcal{I}$ na przestrzeni polskiej X, czyli że rodzina*

$$\{B \in Bor(X) \cap \mathcal{I} : \; B \textit{ jest kodowany w } V\}$$

jest nadal bazą $\mathcal{I}$ w dowolnym generycznym rozszerzeniu $V^{\mathbb{P}}$. Jeśli ponadto, $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ posiadają absolutne kody pomiędzy tranzytywnymi modelami **ZFC**, *dla borelowskich zbiorów z ideałów $\mathcal{I}, \mathcal{J}$, to forsing $(\mathbb{P}, \leq)$ zachowuje własność bycia zbiorem $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina.*

Z twierdzenia tego wynikają następujące wnioski.

Wniosek 10 ([H7, Cor 3.3])**.** *Każdy forsing $\mathbb{P}$, który zachowuje stare liczby (czyli $(\omega^\omega)^V = (\omega^\omega)^{V^{\mathbb{P}}}$) oraz taki, że kody zbiorów borelowkich z σ-ideałów $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ są absolutne, zachowuje własność bycia zbiorem $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina.*

Wniosek 11 ([H7, Cor 3.5])**.** *Niech λ będzie liczbą porządkową oraz $\mathbb{P}_\lambda = ((P_\alpha, \dot{Q}_\alpha) : \alpha < \lambda)$ będzie iteracją z przeliczalnym nośnikiem długości λ taką, że dla każdej $\alpha < \lambda$ zachodzi $P_\alpha \Vdash "\dot{Q} - \sigma\text{-closed}"$ oraz kodowanie borelowskich zbiorów z ideałów $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ są absolutne. Wtedy $\mathbb{P}_\lambda$ zachowuje własność zbioru $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina.*

Rezultaty dotyczące zachowania własności $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Łuzina były oparte na metodzie wprowadzonej przez Martina Goldsterna, opisanej w pracy [Gold]. Rozważmy szczególny przypadek wspomnianej metody. Niech Ω będzie rodziną wszystkich zbiorów domknięto-otwartych na przestrzeni Cantora 2^ω (który jest przeliczalny) oraz rozważmy przestrzeń $C^{random} = \{f \in \Omega^\omega : \; (\forall n \in \omega) \lambda(f(n)) < 2^{-n}\}$ (tutaj λ jest miarą Haara) i Ω wyposażona jest w dyskretną topologię. Definiujemy sumę relacji $\sqsubseteq^{random} = \bigcup_{n \in \omega} \sqsubseteq_n^{ramdom}$ w sposób następujący. Dla dowolnych $n \in \omega$, $f \in C^{random}$, $g \in 2^\omega$ zachodzi:

$$f \sqsubseteq_n^{random} g \longleftrightarrow (\forall k \geq n) \; g \notin f(k).$$

Dla $f \in C^{random}$ możemy zdefiniować zbiór miary zero A_f, w następujący sposób:

$$A_f = \bigcap_{m\in\omega} \bigcup_{n\geq m} f(m) \in \mathcal{N}.$$

Można udowodnić, że dla każdego zbioru $A \in \mathcal{N}$ istnieje $f \in C^{random}$ takie że $A \subseteq A_f$.

Dla dowolnego $g \in 2^\omega$ i $n \in \omega$ zbiór $\{f \in C^{random} : \ f \sqsubseteq_n^{random} g\}$ jest domknięty w C^{random}. Mamy też $f \sqsubseteq^{random} g$ wtedy i tylko wtedy gdy $g \notin A_f$.

Niech $N \prec H_\kappa$ będzie przeliczalnym elementarnym podmodelem H_κ dla wystarczająco dużej liczby kardynalnej κ, takim że $(P, \leq) \in N$. Niech P będzie pojęciem forsingu, $\dot{f}_0, \dots \dot{f}_{k-1} \in V^P$ będą nazwami na funkcje z C^{random}, to znaczy $\Vdash$ "$(\forall i \in k)\ \dot{f}_i \in \hat{C^{random}}$". Niech będzie dany ciąg funkcji $f_0^*, \dots f_{k-1}^*$. Wtedy malejący ciąg $((p_n))_{n\in\omega} \in P^\omega$ interpretuje $\{\dot{f}_i : i < k\}$ jako $\{f_i^* : i < k\}$ jeżeli

$$(\forall i < k)(\forall n \in \omega)\ (p_n \Vdash \text{"}\dot{f}_i \restriction n = f_i^* \restriction n\text{"}).$$

Niech $g \in H_\kappa$, mówimy, że g *nakrywa* N jeżeli

$$(\forall f \in N \cap C^{random})\ (f \sqsubseteq^{random} g).$$

Definicja 5 (P zachowuje $\sqsubseteq^{random}$)**.** *Niech $(P, \leq)$, $N \prec H_\kappa$ będą jak wyżej. Ponadto załóżmy, że $(P, \leq)$ jest pojęciem proper forsingu. Mówimy, że P zachowuje $\sqsubseteq^{random}$, jeżeli dla dowolnych $p_0 \in P \cap N$, $g \in 2^\omega$ i dowolnego ciągu $(p_n)_{n\in\omega} \in P^\omega \cap N$, który interpetuje $\{\dot{f}_i \in V^P : i < k\} \in N$ jako $\{f_i^* : i < k\}$, jeżeli g nakrywa N i dla zadanego ciągu $(n_i)_{i<k}$ takiego, że dla dowolnego $i < k$ mamy $f_i^* \sqsubseteq_{n_i} g$, to istnieje $q \leq p_0$ taki, że:*
 (1) *q jest (N, P)-generic,*
 (2) *$q \Vdash$ "$(\forall f \in N[G])\ (f \sqsubseteq g$"),*
 (3) *$(\forall i < k)\ (q \Vdash$ "$\dot{f}_i \sqsubseteq_{n_i} g$").*

Podstawowymi rezultatami, które będziemy stosować, są dwa następujące twierdzenia:

Twierdzenie 28 ([Gold], Fact 6.11)**.** *Jeżeli P zachowuje $\sqsubseteq^{random}$, to $P \Vdash \lambda(V \cap 2^\omega) = 1$.*

Twierdzenie 29 ([Gold], Cor 5.14, Thm 6.)**.** *Jeżeli iteracja $P_\gamma = ((P_\alpha, \dot{Q}_\alpha) : \alpha < \gamma)$ o przeliczalnym nośniku proper forsingów spełnia warunek*

$$(\forall \alpha < \gamma)\ (\Vdash_\alpha \text{"}\dot{Q} \text{ zachowuje } \sqsubseteq^{random}\text{"}),$$

to wówczas także P_γ zachowuje $\sqsubseteq^{random}$.

Za pomocą tych dwóch twierdzeń, udowodnilismy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 30 ([H7, Thm 3.7])**.** *Załóżmy że pojęcie forsingu $\mathbb{P}$ zachowuje $\sqsubseteq^{random}$. Wtedy $\mathbb{P}$ zachowuje własność bycia zbiorem $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$-Łuzina.*

Ponadto, w pracy [$H7$] udowodniliśmy, że

Uwaga 1. *Niech $V = L$ i $\mathbb{P}$ będzie iteracją z przeliczalnym nośnikiem forsingów $((P_\alpha, \dot{Q}_\alpha) :\ \alpha < \omega_2)$ taką, że:*

- *Jeśli α jest parzystą liczbą porządkową, to $\Vdash_\alpha$ "$\dot{Q}_\alpha = \mathcal{R}$",*
- *α jest nieparzysta, to $\Vdash_\alpha$ "$\dot{Q}_\alpha = \mathcal{L}$".*

Wtedy $\mathbb{P}$ zachowuje własność bycia zbiorem $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$-Łuzina, $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \omega_2 = \mathfrak{c}$, *dodaje ω_2 liczb Lavera. Jeśli $A \in V$ jest zbiorem $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$-Łuzina o mierze pełnej (równej 1) w 2^ω, to w rozszerzeniu generic $V[G]$ A staje się zbiorem całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalnym mocy $\omega_1 < \mathfrak{c}$. Tutaj $\mathcal{R}$ jest forsingiem dodającym jedną liczbę Solovay'a oraz $\mathcal{L}$ jest forsingiem Lavera.*

Metoda otrzymywania zbiorów niemierzalnych w przestrzeni euklidesowej odkryta przez Cichonia i Szczepaniaka [CS], stała się inspiracją do napisania pracy [$H4$]. Pomimo, że dowody w [$H4$] są bardzo elementarne, uzyskane wyniki dotyczą nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha. Istotną rolę odgrywa tu tzw. własność Steinhausa σ-ideału $\mathcal{I}$ na abelowej grupie polskiej G. $\mathcal{I}$ ma własność Steinhausa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych zbiorów A, B, które są $\mathcal{I}$-mierzalne i nie należą do ideału $\mathcal{I}$, istnieje niepusty zbiór otwarty $\emptyset \neq U \subseteq G$, taki że $U \subseteq A + B$. Przykładem jest σ-ideał $\mathcal{M}$ zbiorów pierwszej kategorii na dowolnej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Ustalmy, że $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ jest jednostkową kulą w przestrzeni Banacha X.

W mojej nocie [$H4$] rozważałem σ-ideały niezmiennicze na przesunięcia. Głównymi rezultatami są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 31 ([H4, Thm 2.2])**.** *Niech X, Y będą dowolnymi przestrzeniami Banacha. Załóżmy, że*

(1) *$\mathcal{I}$ jest σ-ideałem na przestrzeni Y mającym własność Steinhausa,*
(2) $(\forall n \in \omega \setminus \{0\})(\forall A \in \mathcal{I})\ (nA = \{n \cdot a :\ a \in A\} \in \mathcal{I})$,
(3) *$f : X \to Y$ jest dowolnym izomorfizmem przestrzeni X, Y, który jednocześnie nie jest homeomorfizmem.*

Wtedy obraz kuli jednostkowej $f[B]$ jest $\mathcal{I}$-niemierzalny w przestrzeni Y.

Twierdzenie 32 ([H4, Thm 2.4])**.** *Niech X, Y będą dowolnymi przestrzeniami Banacha. Załóżmy że*

(1) *$\mathcal{I}$ jest κ-zupełnym ideałem na przestrzeni Y, mającym własność Steinhausa,*
(2) $\min\{|D| :\ D \in \mathscr{P}(X)$ *jest gęsty w* $X\} < \kappa$,
(3) *$f : X \to Y$ jest dowolnym izomorfizmem przestrzeni X, Y, który jednocześnie nie jest homeomorfizmem.*

Wtedy obraz kuli jednostkowej $f[B]$ jest $\mathcal{I}$-niemierzalny w przestrzeni Y.

Natychmiast otrzymujemy wniosek, w którym pierwsza przestrzeń Banacha X jest ośrodkowa.

Wniosek 12. *Załóżmy że X, Y są przestrzeniami Banacha, X jest ośrodkowa, $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{P}(Y)$ jest σ-ideałem na Y posiadającym własność Steinhausa. Wtedy dla dowolnego izomorfizmu $f : X \to Y$, który nie ustala homeomorfizmu pomiędzy X a Y, obraz $f[B]$ kuli jednostkowej jest zbiorem $\mathcal{I}$-niemierzalnym w Y.*

Do tej pory rozważaliśmy głównie σ-ideały posiadające bazę borelowską na ustalonej przestrzeni polskiej. W pracy [$H8$] zastanawiałem się nad niemierzalnością względem ideału Marczewskiego s_0, który nie posiada bazy borelowskiej. Przez $Perf$ oznaczamy rodzinę wszystkich zbiorów doskonałych na ustalonej przestrzeni polskiej X i niech $s \subseteq \mathscr{P}(X)$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów **s-mierzalnych** w sensie Marczewskiego na X, zdefiniowaną następująco:

$$A \in s \longleftrightarrow (\forall P \in Perf)(\exists Q \in Perf)\ (Q \subseteq P \wedge (Q \subseteq A \vee A \cap Q = \emptyset)).$$

Definiujemy rodzinę s_0 zbiorów **Marczewskiego null** w sposób następujący:

$$A \in s_0 \longleftrightarrow (\forall P \in Perf)(\exists Q \in Perf)(Q \subseteq P \wedge A \cap Q = \emptyset).$$

Wiadomo, ze każdy zbiór doskonały w przestrzeni X stanowi rozłączną sumę $\mathfrak{c}$ wiele zbiorów doskonałych. Wnioskujemy stąd, że każdy zbiór Łuzina czy Sierpińskiego jest zbiorem s_0.

Jednym z pierwszych rezultatów osiągniętych w pracy [$H8$], jest następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 1 ([H8, Prop. 2.2])**.** *Jeżeli $\mathfrak{c}$ jest regularną liczbą kardynalną oraz*

$$\mathcal{A} \subseteq \{A :\ A \text{ jest zbiorem Łuzina}\}$$

jest dowolną $\mathfrak{c}$-punktową rodziną taką, że $\bigcup \mathcal{A} \notin s_0$, to istnieje jej podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma $\bigcup \mathcal{A}'$ nie jest s-mierzalna.

Analogiczny wynik otrzymamy, gdy zbiory Łuzina zastąpimy zbiorami Sierpińskiego. Zakładając hipotezę continuum **CH**, nie możemy opuścić założenia, że $\mathcal{A}$ spełnia warunek $(\forall x)|\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}| < \mathfrak{c}$, [H8, Proposition 2.3].

W pracy [JMS] Haim Judah, Arnold Miller i Saharon Shelah udowodnili, że $\mathrm{add}(s_0) = \omega_1$ oraz $\mathrm{cov}(s_0) = \mathfrak{c} = \omega_2$ jest niesprzeczne z teorią **ZFC**.

Podobnie jak w przypadku σ-ideałów z bazą borelowską, współczynniki kardynalne mają wpływ na istnienie s_0-niemierzalnych sum mnogościowych podrodzin tych rodzin zbiorów z s_0, których suma jest spoza s_0.

Twierdzenie 33 ([H8, Thm 2.5]). *Niech* $\mathrm{cov}_h(s_0) = \mathfrak{c}$ *i* $\mathcal{A} \subseteq s_0$ *będzie dowolną* $\mathfrak{c}$*-punktową rodziną zbiorów z ideału Marczewskiego taką, że* $\bigcup \mathcal{A} \notin s_0$*. Wtedy istnieje podrodzina* $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$*, której suma mnogościowa nie jest* s*-mierzalna.*

W dowodzie powyższego twierdzenia istotną rolę odgrywał fakt, że $\mathrm{cov}_h(s_0) = \mathfrak{c}$, Możemy również pokazać, że niesprzeczne z teorią **ZFC** + $\neg$**CH** jest istnienie takiej partycji $\mathcal{A}$ mocy ω_1 na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, dla której istnieje podrodzina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, której suma $\bigcup \mathcal{B}$ nie jest zbiorem s-mierzalnym (Theorem 2.3 w pracy [H8]).

W sytuacji gdy $\mathrm{cov}_h(s_0) < \mathfrak{c}$ możemy dalej otrzymywać zbiory s-niemierzalne, na co odpowiada następne twierdzenie.

Twierdzenie 34 ([H8, Thm 2.6]). *Jest relatywnie niesprzeczne z teorią* **ZFC***, że* $\mathrm{cov}_h(s_0) < \mathfrak{c}$ *oraz istnieje partycja* $\mathcal{A} \subseteq s_0$ *o mocy* ω_1 *prostej rzeczywistej* $\mathbb{R}$*, dla której istnieje podrodzina* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *taka że, suma* $\bigcup \mathcal{B}$ *nie jest zbiorem* s*-mierzalnym.*

Do zbudowania odpowiedniego modelu wystarczy rozważyć iterację długości $\aleph_{\omega_1}$ o skończonym nośniku forsingów dodających jedną liczbę Cohena.

Stosując twierdzenie o indukcji pozaskończonej, możemy pokazać, że przy pewnym założeniu na współczynniki kardynalne istnieją podrodziny rodzin punktowo duże, których suma mnogościowa jest zbiorem Bernsteina.

Twierdzenie 35 ([H8, Thm 3.1]). *Załóżmy że cov*$(s_0) = \mathfrak{c} = \mathrm{cof}(\mathfrak{c})$*. Wtedy dla każdej rodziny* $\mathcal{A} \subseteq s_0$*, która spełnia warunki*

- $\mathcal{A}$ *jest punktowo duża tj.* $\{x \in X : \ |\{A \in \mathcal{A} : \ x \in A\}| < \mathfrak{c}\} \in s_0$,
- $\{(x, y) \in X^2 : \ |\{A \in \mathcal{A} : x, y \in A\}| = \mathfrak{c}\} \in s_0 \times s_0$,

istnieje jej podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$*, której suma* $\bigcup \mathcal{A}'$ *jest zbiorem Bernsteina.*

Mierzalność w sensie Marczewskiego jest ściśle związana ze zbiorami doskonałymi, które otrzymujemy z drzew doskonałych S poprzez operację $[S] = \{x \in 2^\omega : \ (\forall n \in \omega) s \restriction n \in S\}$. Rodzina wszystkich drzew doskonałych z relacją inkluzji stanowi forsing Saksa $\mathbb{S}$. Podobnie, jak ideał Marczewskiego s-mierzalność, można zdefiniować ideał Lavera, Millera i mierzalność zbioru w sensie Lavera czy też Millera. Innym przykładem rodziny drzew są tak zwane **zupełne drzewa Lavera**: $T \in sp$ jeżeli $T \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$ jest drzewem oraz dla dowolnego $t \in T$

$$\{n \in \omega : \ t^\frown n \in T\} \in [\omega]^\omega.$$

W pracy [$H8$] badałem związki jakie zachodzą pomiędzy maksymalnymi rodzinami funkcji prawie rozłącznych na przestrzeni Baire'a a niemierzalnością względem ideałów związanymi z forsingami drzewiastymi. Mówimy, że $\mathcal{A} \subseteq \omega^\omega$ jest rodziną funkcji prawie rozłącznych (a.d.), jeśli dla dowolnych różnych elementów $a, b \in \mathcal{A}$ ich część wspólna jest skończona. Natomiast $\mathcal{A} \subseteq \omega^\omega$ jest maksymalną rodziną funkcji prawie rozłącznych (w skrócie m.a.d.), jeśli jest rodziną prawie rozłączną funkcji w ω^ω i jest maksymalna względem inkluzji.

Na temat tych pojęć, przy założeniu **CH**, otrzymałem następujący rezultat.

Twierdzenie 36 ([H8, Thm 4.1]). *Jeżeli zachodzi* **CH***, to istnieją* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \omega^\omega$ *m.a.d. rodziny, takie że* $\mathcal{A}$ *nie jest* l*-mierzalna oraz* $\mathcal{B}$ *nie jest* sp*-mierzalna w przestrzeni Baire'a.*

Z drugiej strony, otrzymałem następujący rezultat przy założeniu negacji hipotezy continuum.

Twierdzenie 37 ([H8, Thm 4.2]). *Jest relatywnie niesprzeczne że,* **ZFC**+$\neg$**CH** *oraz istnieje m.a.d.* $\mathcal{A}$ *w przestrzeni Baire'a, która nie jest* sp*-mierzalna.*

Powyższy wynik otrzymałem stosując iterację ze skończonym nośnikiem forsingów $(Q_T, \leq)$ o długości κ $(\omega_1 < \kappa)$, gdzie $T \subseteq \omega^\omega$ jest *sp*-drzewem, w którym wszystkie gałęzie tworzą rodzinę funkcji prawie rozłącznych w przestrzeni Baire'a.

Forsing $(Q_T, \leq)$ definiujemy następująco: $p = (x_p, s_p^g, s_p^b, \mathcal{F}_p) \in Q_T$ jeżeli

- $x_p \in \omega^{<\omega}$,
- s_p^g, s_p^b są niepustymi skończonymi poddrzewami T,
- $\mathcal{F}_p \in [\omega^\omega]^{<\omega}$.

Dla $t \in \omega^{<\omega}$ i niepustego skończonego drzewa $\tau \subseteq \omega^{<\omega}$ niech $t \restriction \tau = \bigcup\{s \in \tau : s \subseteq t\}$ będzie maksymalnym początkowym podciągiem ciągu t, który należy do τ.

Porządek definiujemy następująco: dla dowolnych $p = (x_p, s_p^g, s_p^b, \mathcal{F}_p) \in Q_T$ i $q = (x_q, s_q^g, s_q^b, \mathcal{F}_q) \in Q_T$ mamy $p \leq q$ jeżeli

(1) $x_q \subset x_p \wedge s_q^g \subseteq s_p^g \wedge s_q^b \subseteq s_p^b \wedge \mathcal{F}_q \subseteq \mathcal{F}_p$,
(2) $(\forall t \in s_p^g)\ x_p \cap t \subseteq (t \restriction s_q^g) \cup x_q$,
(3) $(\forall h \in \mathcal{F}_q)(x_p \cap h = x_q \cap h)$,
(4) $(\forall h \in \mathcal{F}_q)(\forall t \in s_p^b)\ t \cap h = (t \restriction s_q^b) \cap h$,
(5) $(\forall h \in \mathcal{F}_q)(\forall t \in s_p^g)\ t \cap h = (t \restriction s_q^g) \cap h$.

Na początku udowodniłem, że rozważane pojęcie forsingu jest σ-centrowane (więc jest c.c.c.). Następnie dla generycznych obiektów określonych następująco:

$$x_G = \bigcup\{x_p :\ p \in G\},$$

$$S_G^g = \bigcup\{s_p^g : p \in G\} \text{ i } S_G^b = \bigcup\{s_p^b : p \in G\},$$

udowodniłem następujące własności:

Claim 1. $(\forall S \in SPT(T) \cap V)\ (S_G^g \cap S \in SPT(T) \wedge S_G^b \cap S \in SPT(T))$.

Claim 2. *Dla każdego* $S \in SPT(T) \cap V$ *zbiór*

$$\{z \in [S_G^b \cap S] :\ |x_G \cap z| = |x_G \setminus z| = \omega\}$$

jest rezydualny w $[S_G^b \cap S]$.

Claim 3. *Jeśli* $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega \cap V$ *jest rodziną zbiorów prawie rozłącznych w* ω^ω, *to rodziny zbiorów* $\{x_G\} \cup [S_G^g] \cup \mathcal{F}$ *i* $[S_G^b] \cup \mathcal{F}$ *są również prawie rozłączne w* ω^ω.

Następnie, w β-kroku iteracji $((P_\alpha : \alpha \leq \kappa), (\dot{Q}_\beta : \beta < \kappa))$ takim, że $\Vdash_{P_\beta} \dot{Q}_\beta = \hat{Q}_T$ dochodzą wyżej wspomniane obiekty generyczne $x_\beta = i_{G_{\beta+1}}(\dot{x}_{H_\beta})$, $S_\beta^g = i_{G_{\beta+1}}(\dot{S}_{H_\beta}^g)$, $S_\beta^b = i_{G_{\beta+1}}(\dot{S}_{H_\beta}^b)$ (tutaj $G \subseteq P_\kappa$ jest filtrem generycznym nad wyjściowym modelem $V \models GCH$, natomiast H_β jest $i_{G_{\beta+1}}(\dot{Q}_T)$ filtrem generycznym, nad $V[G_\beta]$, takim że $G_{\beta+1} = G_\beta * H_\beta$). Następnie definiujemy $\mathcal{A}_0 = \emptyset$, $\mathcal{A}_{\beta+1} = \mathcal{A}_\beta \cup \{x_\beta\} \cup [S_\beta^g]$. W granicznym przypadku bierzemy $\mathcal{A}_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} \mathcal{A}_\xi$. W końcu biorąc dowolną maksymalną *a.d.* rodzinę zawierającą $\mathcal{A} = \bigcup_{\beta<\kappa} \mathcal{A}$, otrzymujemy żądany zbiór spełniający tezę naszego twierdzenia.

Ostatni rezultat tej pracy, to wykazanie, że jest relatywnie niesprzeczne z **ZFC**, że zachodzi ostra nierówność $cov(s_0) < \mathfrak{a}$ (tutaj $\mathfrak{a}$ jest najmniejszą mocą maksymalnej względem inkluzji rodziny funkcji prawie rozłącznych w przestrzeni Baire'a).

Omówienie pozostałego dorobku naukowego

Lista prac wchodzących do pozostałego dorobku naukowego:

[P1] J. Kraszewski, R. Rałowski, P. Szczepaniak and Sz. Żeberski, Bernstein sets and kappa coverings, Mathematical Logic Quarterly, 56 (2) 2010, 216-224,

[P2] M. Bienias, Sz. Głąb, R. Rałowski, Sz. Żeberski, Two point sets with additional properties, Czechoslovak Mathematical Journal, vol 63, no 4(2013), 1019-1037,

[P3] R. Rałowski, P. Szczepaniak and Sz. Żeberski, A generalization of Steinhaus theorem and some nonmeasurable sets, Real Analysis Exchange, vol. 35, nr 1 (2009/2010), 1-9,

[P4] T. Banakh, M. Morayne, R. Rałowski, Sz. Żeberski, Topolgically invariant σ-ideals on the Hilbert cube, Israel Journal of Mathematics, vol. 209, (2015), 715-743,

[P5] T. Banakh, M. Morayne, R. Rałowski, Sz. Żeberski, Topolgically invariant σ-ideals on the Euclidean spaces, Fundamenta Mathematicae, vol. 231, (2015), 101-112,

[P6] T. Banakh, R. Rałowski, Sz. Żeberski, Classifying invariant σ-ideals with analytic base on good Cantor measure spaces, Proceedings of American Mathematical Society, vol. 144 (2016) 837-851,

[P7] M. Burnecki, R. Rałowski, Topologies on the group of invertible transformations, Banach Center Publications, 95 (2011), 273-280,

[P8] R. Gielerak and R. Rałowski, Statistical mechanics of Class of Anyonic Systems. The Rigorous Approach, J. of Nonlinear Math. Phys. Vol 11 (2004), 85–91,

[P9] R. Gielerak and R. Rałowski, Convergence of virial expansions for some anyonic-like systems, Proceedings of the Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Part I (Nałeczów, 1999). J. Math. Sci. (New York) 105 (2001), no. 6, 2555–2556,

[P10] R. Rałowski, On the kernel of the Hermitian Form and Partition Function, Proceedings of 6th Int. School on Theoretical Physics, Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter. Word Scientific, 2001,

[P11] R. Gielerak and R. Rałowski, Wick Algebras Approach to Physics of 2D Systems, Proceedings of 5th Int. School on Theoretical Physics, Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter. Word Scientific, 1999,

[P12] R. Rałowski, On Wick algebras with additional twisted commutation relations, J. Phys. A 30 (1997),no. 9, 3235–3247,

[P13] W. Marcinek R. Rałowski, On Wick algebras with braid relations, J. Math. Phys. 36(1995), no. 6, 2803–2812,

[P14] M. Kozłowski and R. Rałowski, The dielectric response with respect to the weight distribution of relaxation times, Journ. of Math. Chem. vol. 46, nr 4 (2009), 1087-1102,

[P15] R. Rałowski and M. Kozłowski, The Havriliak-Negami Dielectric Response in Time Domain, Polish J. Chem., Vol 79 (2005), 1353–1356,

[P16] M. Kozłowski, R. Rałowski, H. Kołodziej, An Application of the Burr Function to the Description of Dielectric Relaxation Data in Frequency Domain, IEEE Trans. DEI. Vol 10 (2003), 256-259.

Prace wchodzące do pozostałego mojego dorobku naukowego można podzielić na trzy części. Pierwszą część stanowią prace z matematyki, w skład drugiej wchodzą prace z dziedziny fizyki matematycznej a do ostatniej należą artykuły z dziedziny chemii fizycznej.

W pracy $[P1]$ rozważaliśmy takie zbiory na abelowych grupach polskich, że każdy zbiór o ustalonej mocy κ nakrywają po pewnej translacji. Zbiory te nazywamy κ-nakrywającymi. Analogicznie, powiemy że zbiór $A \subseteq G$ jest $< \kappa$-nakrywający, jeżeli każdy podzbiór grupy G mocy mniejszej niż κ, da się wsunąć w zbiór A przy użyciu jednej translacji. Inspiracją tej pracy były wyniki otrzymane przez Muthuvela [Mu] i dotyczyły głównie zbiorów κ-nakrywających w przypadku skończonej liczby kardynalnej κ oraz Nowika [Now1, Now2] gdzie rozważane były zbiory ω lub $< \omega$-nakrywające o niskiej klasie deskryptywnej. We wspomnianych pracach Nowika podane zostały przykłady partycji przestrzeni Cantora 2^ω na continuum wiele zbiorów borelowskich, które są jednocześnie zbiorami ω-nakrywającymi oraz partycji na dwa zbiory, pierwszy G_δ miary zero N a drugi F_σ pierwszej kategorii M takie, że każde dwa rozłączne przeliczalne zbiory mogą być wsunięte przy użyciu jednej translacji w zbiory M i N.

Pierwszym wynikiem naszej wspólnej pracy jest istnienie rozbicia prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ na dwa zbiory Bernsteina takie, że każdy z nich nie jest zbiorem 2-nakryciowym. Z drugiej strony znaleźliśmy partycję prostej $\mathbb{R}$ na continuum wiele zbiorów Bernsteina, z których każdy jest $< cof(\mathfrak{c})$-nakryciem. Ponadto, jeżeli $\mathcal{I}$ jest σ-ideałem na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ mającym własność Steinhausa, to przy założeniu $\mathrm{non}(\mathcal{I}) < \mathfrak{c}$, istnieje zbiór całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny, który jest jednocześnie zbiorem $< \mathfrak{c}$-nakrywającym.

Pojęcie zbioru κ-nakrywającego stało się punktem wyjścia do pewnych jego odmian, mianowicie S-nakrycia oraz I-nakrycia.

Powiemy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest κ-S-nakryciem, jeśli

- jest rodziną parami rozłącznych podzbiorów prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$,
- $|\mathcal{A}| = \kappa$,
- $(\forall F \in [\mathbb{R}]^\kappa)(\exists t \in \mathbb{R})(\forall A \in \mathcal{A})\ (|(t+F) \cap A| = 1 \wedge t + F \subseteq \bigcup \mathcal{A})$.

Nasze wyniki dotyczą rodzin $\mathcal{A}$, których elementami są zbiory całkowicie niemierzalne względem pewnych σ-ideałów na $\mathbb{R}$. Przykładem tego może być następujące twierdzenie.

Twierdzenie 38 ([P1, Thm 3.3])**.** *Dla ustalonej liczby kardynalnej κ takiej że $2 < \kappa < \mathfrak{c}$. Jeżeli $2^\kappa \leq \mathfrak{c}$, to istnieje partycja $\mathbb{R}$ na zbiory Bernsteina $\{B_\xi : \xi < \kappa\}$, taka że*

- *dla dowolnego $\xi < \kappa$ B_ξ nie jest zbiorem 2-nakryciowym ale*
- *$\{B_\xi :\ \xi < \kappa\}$ jest κ-S-nakryciem.*

Wiadomo, że przy **MA** założenia twierdzenia są spełnione dla dowolnej liczby κ spełniającej warunek $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$. To gwarantuje niesprzeczność tezy twierdzenia z teorią **ZFC**.

Nieco ogólniejszą sytuację przedstawia kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 39 ([P1, Thm 3.5])**.** *Niech κ będzie taką liczbą kardynalna, że zachodzi równość $2^\kappa = \mathfrak{c}$. Niech $(G, +)$ będzie nieprzeliczalną abelową grupą polską z zadaną metryką d. Ponadto, niech $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{P}(G)$ będzie ustalonym σ-ideałem na G takim, że*

- $(\forall B \in Bor(G) \setminus \mathcal{I})(\forall \mathcal{D} \in [\mathcal{I}]^{<\mathfrak{c}})\ (|B \setminus \bigcup \mathcal{D}| = \mathfrak{c})$,
- *istnieje $a \in rng(d) \setminus \{0\}$ takie, że $(\forall x \in G)\ (\{y \in G :\ d(x,y) = a\} \in \mathcal{I})$.*

Wtedy istnieje rodzina zbiorów parami rozłącznych $\{B_\xi : \xi < \kappa\}$, dla której zachodzi

(1) *B_ξ jst zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym w G dla dowolnej $\xi < \kappa$,*
(2) *B_ξ nie jest zbiorem 2-nakrywającym dla dowolnego $\xi < \kappa$,*
(3) *$\{B_\xi : \xi < \kappa\}$ jest κ-S-nakryciem.*

Translację w definicji zbioru, który jest κ-nakryciem, możemy zastąpić dowolną izometrią np. na płaszczyźnie. Wtedy mamy do czynienia z pojęciem zbioru, który jest κ-I-nakrywającym. Mianowicie, podzbiór płaszczyzny $A \subseteq \mathbb{R}^2$ jest κ-I-nakrywającym, jeżeli spełniony jest następujący warunek

$$(\forall B \in [\mathbb{R}^2]^\kappa)(\forall \varphi \in \mathbb{R}^{2^{\mathbb{R}^2}})\ (\varphi \text{ jest izometrią i } \varphi[B] \subseteq A).$$

Następujące dwa twierdzenia pokazują różnicę pomiędzy 2 a 3 -I nakryciami.

Twierdzenie 40 ([P1, Thm 4.3])**.** *Każdy zbiór Bernsteina w $\mathbb{R}^2$ jest 2-I-nakryciem.*

Twierdzenie 41 ([P1, Thm 4.4])**.** *Istnieje zbiór Bernsteina w $\mathbb{R}^2$, który nie jest 3-I-nakryciem.*

Tezy twierdzenia 40 nie można rozszerzyć na dowolne zbiory całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalne.

Twierdzenie 42 ([P1, Thm 4.5])**.** *Jeśli $\mathcal{I} \in \{\mathcal{N}, \mathcal{M}\}$ to istnieje zbiór całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny w $\mathbb{R}^2$, taki który nie jest 2-I-nakrywający.*

W pracy $[P2]$ napisanej wspólnie z Markiem Bieniasem, Szymonem Głąbem oraz Szymonem Żeberskim badaliśmy zbiory, które wprowadził Stefan Mazurkiewicz. W literaturze zbiory te znane są jako zbiory Mazurkiewicza oraz jako dwu-punktowe zbiory. Powiemy, że podzbiór płaszczyzny $A \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zbiorem Mazurkiewicza jeżeli z każdą prostą na płaszczyźnie ma dokładnie dwa punkty wspólne. Wiadomo, że zbiory te są dość złożone. Mianowicie nie mogą być F_σ, co wykazał w swojej pracy [Lar] Larman. Ponadto, w uniwersum konstruowalnym L, zbiory te mogą być koanalityczne, co udowodnił Miller [Mi].

Pierwszym wynikiem w tej pracy jest istnienie zbioru Mazurkiewicza, który stanowi bazę Hamela przestrzeni $\mathbb{R}^2$ nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ i jest jednocześnie zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym względem σ-ideału zawierającym wszystkie singletony, posiadającym bazę borelowską. Następnie udowodniliśmy istnienie zbioru Mazurkiewicza, który jest w ideale Marczewskiego s_0. Ponadto, jeśli rozważany σ-ideał $\mathcal{I}$ ma taką własność, że dla każdego zbioru borelowskiego B spoza $\mathcal{I}$ istnieje $\mathfrak{c}$ wiele prostych równoległych, takich że każda z nich ma przecięcie ze zbiorem B mocy continuum. Wtedy istnieje zbiór Mazurkiewicza w ideale s_0, który stanowi bazę Hamela i jest jednocześnie zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym. Udowodniliśmy również, że istnieje zbiór Mazurkiewicza, który jest bazą Hamela, jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny i jest równocześnie niemierzalnym w sensie Marczewskiego.

Pojęcie zbioru Mazurkiewicza można w naturalny sposób uogólnić do κ-punktowego zbioru dla ustalonej liczby kardynalnej $2 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$, to jest takiego podzbioru płaszczyzny, który z każdą prostą ma przekrój mocy κ. Udowodniliśmy, że jeśli jest dana liczba naturalna $n \geq 2$, to każdy n-punktowy zbiór da się rozbić na n parami rozłącznych bijekcji $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.

Wykazaliśmy związek pomiędzy zbiorem Bernsteina na prostej $\mathbb{R}$, a zbiorem Mazurkiewicza, który daje się wyrazić w następujący sposób: dla dowolnego zbioru Bernsteina $B \subseteq \mathbb{R}$ istnieje zbiór Mazurkiewicza $A \subseteq \mathbb{R}^2$, który jest jednocześnie zbiorem miary zero oraz pierwszej kategorii w $\mathbb{R}^2$ o tej własności, że dla dowolnej funkcji $f \subseteq A$, $f^{-1}[(0,1)] = B$.

Prawdą jest, że każdy zbiór Mazurkiewicza nie jest ani zbiorem Bernsteina, ani Łuzina, ani zbiorem Sierpińskiego. Z tego powodu wprowadziliśmy pojęcie częściowego zbioru Mazurkiewicza, to znaczy takiego zbioru, który z każdą prostą ma co najwyżej dwupunktowy przekrój. Pojęcie to natychmiast prowadzi do wyniku, które mówi że przy założeniu **CH** istnieje zbiór Łuzina, który jest częściowym zbiorem Mazurkiewicza. Analogiczny wynik dotyczy zbioru Sierpińskiego.

Ponadto, w pracy $[P2]$ wykazaliśmy istnienie $\aleph_0$ punktowego zbioru, który nie jest 2-I-nakrywającym zbiorem. Pokazliśmy również, że istnieje $\aleph_0$-punktowy zbiór, który jest $\aleph_0$-nakrywającym zbiorem.

Wykazaliśmy także, że po dodaniu do universum konstruowalnego L, ω_2 niezależnych liczb Cohena, otrzymamy model **ZFC**, w którym $\omega_1 < \mathfrak{c} = \omega_2$ i istnieje $\aleph_1$-punktowy zbiór, który jest jednocześnie $\aleph_1$-nakrywającym.

Dla ustalonej liczby naturalnej n większej od jedności, znaleźliśmy przykłady zbiorów n-punktowych, z których jeden nie jest 2-I-nakrywającym a drugi jest n-nakrywającym zbiorem.

W tej samej pracy badaliśmy własności kombinatoryczne zbiorów Mazurkiewicza z punktu widzenia rodzin zbiorów prawie rozłącznych. Niech h będzie ustalona definiowalną bijekcją borelowską pomiędzy prostą rzeczywistą $\mathbb{R}$ a przestrzenią Ramsey'a $[\omega]^\omega$. Ponadto, niech π_1, π_2 będą rzutami ortogonalnymi płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na pierwszą, odpowiednio na drugą, oś. Wtedy, jest relatywnie niesprzeczne z teorią **ZFC**, że $\neg$**CH** i istnieje częściowy zbiór Mazurkiewicza $A \subseteq \mathbb{R}^2$, dla którego $h[\pi_1[A] \cup \pi_2[A]]$ stanowi maksymalną rodzinę mocy ω_1 zbiorów prawie rozłącznych w ω.

Jako ostatni wynik pracy $[P2]$, wykazaliśmy że w modelu otrzymanym przez dodanie ω_2 liczb Cohena do uniwersum konstruowalnego L istnieje częściowy zbiór Mazurkiewicza $C \subseteq \mathbb{R}^2$ mocy ω_2, który jest zbiorem Łuzina oraz spełnia następującą własność:

$$(\exists A \in \mathcal{N})(\forall D \in [C]^{\omega_1})\ (A + D = \mathbb{R}^2).$$

Analogiczny wynik dotyczy zbioru Sierpińskiego, możemy otrzymać przez dodanie ω_2 liczb Solovay'a do uniwersum konstruowalnego L.

Inspiracją kolejnej pracy [$P3$] napisanej wspólnie z Przemysławem Szczepaniakiem i Szymonem Żeberskim było znane twierdzenie Steinhausa, które mówi, że suma kompleksowa $A+B$ ma niepuste wnętrze dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ o dodatniej mierze Lebesgue'a.

Pierwszym rezultatem w tej pracy jest uogólnienie wspomnianego wyżej twierdzenia.

Twierdzenie 43 ([P3, Thm 2.1])**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie $\mathcal{N}$ lub $\mathcal{M}$. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 oraz*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \vee \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\} \in \mathcal{I}.$$

Niech $A, B \in Bor(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{I}$ będą borelowskimi zbiorami spoza σ-ideału $\mathcal{I}$. Wtedy zbiór $f[A \times B]$ zawiera niepusty przedział otwarty na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.

Klasyczne twierdzenie Steinhausa posłużyło do dowodu twierdzenia Cichonia-Szczepaniaka [CS] o kuli w przestrzeni euklidesowej.

Twierdzenie 44 (Cichoń-Szczepaniak)**.** *Niech m, n będą dwiema różnymi dodatnimi liczbami naturalnymi oraz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ustala izomorfizm nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Wtedy dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$ takiego, że A, A^c mają niepuste wnętrza w $\mathbb{R}^n$, obraz $f[A] \subseteq \mathbb{R}^m$ ma miarę wewnętrzną Lebesgue'a równą zero i jest równocześnie o pełnej mierze zewnętrznej w sensie Lebesgue'a na $\mathbb{R}^m$.*

Zastosowanie twierdzenia 44 pozwoliło otrzymać niemierzalne zbiory o pewnych algebraicznych własnościach. Przykładem tego zjawiska mogą być następujące twierdzenia uzyskane w omawianej pracy.

Twierdzenie 45 ([P3, Thm 3.2])**.** *Istnieje zbiór całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalny $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $A+A = A$ oraz $A - A = \mathbb{R}$.*

Twierdzenie 46 ([P3, Thm 3.3])**.** *Istnieje partycja $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ na zbiory całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne taka, że dla każdego $n \in \omega$ zachodzi $A_n + A_n = A_n$.*

Twierdzenie 47 ([P3, Thm 3.5])**.** *Istnieje partycja $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ na zbiory całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne taka, że*

$$(\forall m, n \in \omega)\ (m \neq n \longrightarrow A_m + A_n = \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Twierdzenie 48 ([P3, Thm 3.7])**.** *Istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $A, A+A, A+A+A, \ldots$ są całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne oraz $\bigcup_{n\in\omega} \underbrace{A + \ldots + A}_{n} = \mathbb{R}$.*

Twierdzenie 49 ([P3, Thm 3.9])**.** *Istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że*

$$A \subsetneq A+A \subsetneq A+A+A \subsetneq \ldots$$

są całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne oraz $\bigcup_{n\in\omega} \underbrace{A + \ldots + A}_{n}$ jest również zbiorem całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalnym na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 50 ([P3, Thm 3.11])**.** *Istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że*

$$A \supsetneq A+A \supsetneq A+A+A \supsetneq \ldots$$

są całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.

Podaliśmy również odpowiedniki multiplikatywne powyższych twierdzeń, które są wnioskami z otrzymanych wyżej rezultatów.

Twierdzenie 51 ([P3, Cor 3.2])**.** *Istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalny taki, że $A \cdot A = A$.*

Twierdzenie 52 ([P3, Cor 3.3]). *Istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, że*

$$A \subsetneq A \cdot A \subsetneq A \cdot A \cdot A \subsetneq \dots$$

są całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne oraz $\bigcup_{n\in\omega} \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$ *jest również zbiorem całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalnym na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.*

Pytanie, czy minimalna moc rodziny zbiorów Cantora jaka jest konieczna aby pokryć kostkę Hilberta $\mathbb{I}^\omega$ jest taka sama jak minimalna moc rodziny zbiorów Cantora pokrywającej odcinek $\mathbb{I} = [0,1]$ było otwarte przez jakiś czas i zwróciło uwagę matematyków (dla przykładu, to pytanie było postawione na stronie UCL Marianny Csörney). We wspólnej pracy [*P*4], napisanej z Tarasem Banakhem, Michałem Morayne oraz z Szymonem Żeberskim podaliśmy odpowiedź twierdzącą. W artykule tym rozważaliśmy topologicznie niezmiennicze ideały na kostce Hilberta $\mathbb{I}^\omega$ wyposażona w topologię produktową. Traktując ideały $\mathcal{I} \subseteq [\mathbb{I}^\omega]^{\leq\omega}$ i $\mathscr{P}(\mathbb{I}^\omega)$ jako trywialne na kostce Hilberta, pokazaliśmy że ideał zbiorów pierwszej kategorii $\mathcal{M}$ na $\mathbb{I}^\omega$ jest ideałem maksymalnym wsród wszystkich σ-ideałów topologicznie niezmienniczych posiadających bazę z własnością Baire'a oraz że σ-ideał $\mathcal{M}$ jest największym wsród nietrywialnych topologicznie niezmienniczych σ-ideałów na $\mathbb{I}^\omega$ posiadających bazę zbiorów σ-zwartych na $\mathbb{I}^\omega$. Z drugiej strony rozważaliśmy σ-ideały generowane przez tak zwane minimalne zbiory Cantora na kostce $\mathbb{I}^\omega$ to znaczy takie zbiory C homeomorficzne ze zbiorem Cantora, że dla dowolnego zbioru doskonałego $P \subseteq \mathbb{I}^\omega$ istnieje homeomorfizm $h \in Homeo(\mathbb{I}^\omega)$, dla którego zachodzi inkluzja $h[C] \subseteq P$. Ideał ten oznaczamy przez $\sigma\mathcal{C}_0$. Każdy nietrywialny topologicznie niezmienniczy z bazą analityczną σ-ideał na $\mathbb{I}^\omega$ zawiera $\sigma\mathcal{C}_0$. W naszych rozważaniach kluczową charakteryzują jest: zbiór Cantora w $\mathbb{I}^\omega$ jest minimalny wtedy i tylko wtedy gdy jest $\mathcal{Z}_\omega$-zbiorem. Tutaj domknięty zbiór $A \subseteq \mathbb{I}^\omega$ jest $\mathcal{Z}_\omega$-zbiorem wtedy i tylko wtedy gdy, zbiór

$$\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^\omega, \mathbb{I}^\omega) : \ f[\mathbb{I}^\omega] \cap A = \emptyset\}$$

jest zbiorem gęstym w przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych $\mathcal{C}(\mathbb{I}^\omega, \mathbb{I}^\omega)$ wyposażonej w topologię zwarto-otwartą.

Powyższy opis minimalnych zbiorów Cantora wraz z kombinatoryczną charakteryzacją dla $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$, $\mathrm{non}(\mathcal{M})$ podaną przez Tomasza Bartoszyńskiego (np. [Bart],[BartJud]) prowadzi do równości

$$\mathrm{cov}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cov}(\sigma\mathcal{C}_0), \ \mathrm{non}(\mathcal{M}) = \mathrm{non}(\sigma\mathcal{C}_0) \leq \mathrm{non}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{M})$$

dla wspomnianej klasy σ-ideałów $\mathcal{I}$.

W badaniu takich współczynników kardynalnych jak add, czy cof główną rolę odegrał fakt, że przestrzeń wszystkich homeomorfizmów na kostce Hilberta $\mathbb{I}^\omega$ jest przestrzenią polską z topologią zwarto-otwartą, która pochodzi od metryki

$$\tilde{d}(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{I}^\omega} d(f(x), g(x)) + \sup_{x\in\mathbb{I}^\omega} d(f^{-1}(x), g^{-1}(x)).$$

Z drugiej strony twierdzenie *$\mathcal{Z}$-set unknotting theorem* gwarantuje nam, że każde dwa minimalne zbiory Cantora są "ambiently" homeomorficzne, co oznacza, że dla dowolnych minimalnych zbiorów Cantora $A, B \subseteq \mathbb{I}^\omega$ istnieje homeomorfizm $h \in Homeo(\mathbb{I}^\omega)$ taki, że $f[A] = B$. Wspomniane przed chwilą własności pozwalają udowodnić, że dla ustalonego minimalnego zbioru Cantora i gęstego $G \in G_\delta$ zawartego w $\mathbb{I}^\omega$, zbiór

$$\{h \in Homeo(\mathbb{I}^\omega) : \ h[A] \subseteq G\}$$

jest gęstą G_δ w przestrzeni $Homeo(\mathbb{I}^\omega)$.

Przypomnijmy, że dla dowolnych ideałów na przestrzeni polskiej, relatywne współczynniki wyrażają się wzorami

$$\mathrm{add}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{J}\},$$
$$\mathrm{cof}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = \min\{|\mathcal{B}| : \ \mathcal{B} \subseteq \mathcal{J} \wedge (\forall A \in \mathcal{I})(\exists B \in \mathcal{B}) A \subseteq B\}.$$

Współczynniki kardynalne dla σ-ideałów $\mathcal{M}$ oraz $\sigma\mathcal{C}_0$ przedstawiają się następująco:

- $\mathrm{non}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{non}(\mathcal{M})$,

- $\mathrm{cov}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$,
- $\mathrm{add}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathrm{add}(\sigma\mathcal{C}_0, \mathcal{M})$,
- $\mathrm{cof}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\sigma\mathcal{C}, \mathcal{M})$.

W pracy rozważaliśmy również topologicznie niezmiennicze właściwe σ-ideały $\mathcal{I}$ na kostce Hilberta, które nie są zawarte w σ-ideale zbiorów pierwszej kategorii Baire'a. Okazuje się, że σ-ideał $\sigma\mathcal{G}_0$ generowany przez tak zwane *tame*-G_δ zbiory, jest najmniejszym topologicznie niezmienniczym σ-ideałem na $\mathbb{I}^\omega$ wsród wszystkich topologicznie niezmienniczych σ-ideałów $\mathcal{I}$ na kostce Hilberta, posiadających bazę z własnością Baire'a, które nie zawierają się w σ-ideale $\mathcal{M}$. Wówczas współczynniki przedstawiają się następująco:

$$\omega_1 \leq \mathrm{add}(\sigma\mathcal{G}_0) \leq \mathrm{cov}(\sigma\mathcal{G}_0) \leq \mathrm{add}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{non}(\sigma\mathcal{G}_0) \leq \mathrm{cof}(\sigma\mathcal{G}_0) \leq \mathfrak{c}.$$

Reasumując, dla topologicznie niezmienniczych σ-ideałów $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ na $\mathbb{I}^\omega$ z bazą analityczną takich, że $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$ i $\mathcal{J} \nsubseteq \mathcal{M}$, mamy następujący topologiczny wariant diagramu Cichonia:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathrm{non}(\sigma\mathcal{G}_0) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{J}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{J}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathrm{non}(\mathcal{I}) \arrow[r, equal] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cof}(\mathcal{I}) \arrow[urr, bend right] & & \\
 & & \mathrm{add}(\mathcal{I}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r, equal] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{I}) \arrow[u] & & \\
\omega_1 \arrow[r] \arrow[urr, bend left] & \mathrm{add}(\mathcal{J}) \arrow[r] & \mathrm{cov}(\mathcal{J}) \arrow[r] & \mathrm{cov}(\sigma\mathcal{G}_0) \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd}$$

W pracy [$P5$] napisanej wspólnie z Banakhem, Morayne i Żeberskim badaliśmy współczynniki kardynalne dla topologicznie niezmienniczych nietrywialnych σ-ideałów na przestrzeniach euklidesowych. Tutaj przez nietrywialny σ-ideał rozumiemy σ-ideał zwierający zbiory nieprzeliczalne i jednocześnie różny od ideału wszystkich podzbiorów $P(\mathbb{R}^n)$. Tak jak w poprzednio omawianej pracy, pierwsze wyniki dotyczyły wyznaczenia maksymalnego (największego) nietrywialnego σ-ideału, który jest topologicznie niezmienniczy, posiada bazę o własności Baire'a. Tym ideałem okazała się rodzina wszystkich zbiorów pierwszej kategorii $\mathcal{M}$ na $\mathbb{R}^n$, o czym mówi twierdzenie 2.1 w pracy [$P5$]. Ponadto, wyznaczyliśmy najmniejszy σ-ideał z bazą analityczną, który również jest topologicznie niezmienniczy. Ideał ten, oznaczany przez $\sigma\mathcal{C}_0$ jest generowany przez tak zwane zbiory *tame*-Cantora, twierdzenie 2.2 w pracy [$P5$]. Zbiór *tame*-Cantora z definicji jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$, dla którego istnieje homeomorfizm $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i jest obrazem $h[C]$, gdzie $C \subseteq \mathbb{R} \times \{0\}^{n-1}$ jest zbiorem Cantora na jednowymiarowej kopii $\mathbb{R}$. Wiadomo, że wszystkie zbiory *tame*-Cantora są *ambiently* homeomorficzne ze sobą. Jedną z równoważnych definicji zbioru *tame*-Cantora jest, że każdy domknięty podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest *tame*-Cantorem, jeżeli dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje skończona rodzina $\mathcal{F}$ homeomorficznych kopii $[0,1]^n$ takich, że ich średnice są mniejsze od ϵ i że żądany zbiór jest zawarty we wnętrzu $\bigcup \mathcal{F}$. Głównym wynikiem w tej pracy dotyczącym współczynników kardynalnych dla nietrywialnych topologicznie niezmienniczych σ-ideałów z bazą analityczną jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 53 ([P5], Thm 2.4)**.** *Dla $\sigma\mathcal{C}$ na $\mathbb{R}^n$ zachodzą następujące równości:*

- $non(\sigma\mathcal{C}) = non(\mathcal{M})$,
- $cov(\sigma\mathcal{C}) = cov(\mathcal{M}))$,
- $add(\sigma\mathcal{C}) = add(\sigma\mathcal{C}, \mathcal{M}) = add(\mathcal{M})$,
- $cof(\sigma\mathcal{C}) = cof(\sigma\mathcal{C}, \mathcal{M}) = cof(\mathcal{M})$.

Tak więc jako wniosek dla nietrywialnych topologicznie niezmienniczych σ-ideałów $\sigma\mathcal{C} \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, posiadających bazę analityczną na $\mathbb{R}^n$ mamy następujące relacje pomiędzy współczynnikami kardynalnymi

Wniosek 13 ([P5], Corollary 2.3)**.** *Dla nietrywialnego topologicznie niezmienniczego σ-ideału $\mathcal{I}$ na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z bazą analityczną mamy*

- $non(\mathcal{I}) = non(\mathcal{M})$,
- $cov(\mathcal{I}) = cov(\mathcal{M})$,
- $add(\mathcal{I}) \leq add(\mathcal{M})$,
- $cof(\mathcal{M}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{I})$.

Tutaj nierówności mogą być ostre o czym świadczy przykład 2.6 w pracy [$P5$], nietrywialnego topologicznie niezmienniczego σ-ideału $\mathcal{I}$ na $\mathbb{R}^2$, generowanego przez odcinek $[0,1] \times \{0\}$. Wówczas $add(\mathcal{I}) = \omega_1$ i jednocześnie $cof(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$.

Powyższy wniosek ilustruje diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{non}(\mathcal{I}) \arrow[r, equal] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{I}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
\omega_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{I}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r, equal] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{I}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Z wniosku 13 otrzymaliśmy również twierdzenie mówiące o współczynnikach kardynalnych dla σ-ideałów $\sigma\mathcal{D}_k$, generowanych przez domknięte podzbiory $\mathbb{R}^n$ o wymiarze topologicznym $k < n$.

Twierdzenie 54 ([P5], Thm 2.7)**.** *Dla dowolnych liczb naturalnych $k < n$ mamy*

- $non(\sigma\mathcal{D}_k) = non(\mathcal{M})$,
- $add(\sigma\mathcal{D}_k) = add(\mathcal{M})$,
- $cov(\sigma\mathcal{D}_k) = cov(\mathcal{M})$,
- $cof(\sigma\mathcal{D}_k) = cof(\mathcal{M})$.

Przedmiotem badań w pracy [$P6$] wspólnie napisanej z Banakhem i Żeberskim była klasyfikacja σ-ideałów z bazą borelowską, które są niezmiennicze względem (w pewnym sensie) dobrej miary borelowskiej na przestrzeni Cantora.

Uporządkowaną parę (X, λ) nazywamy miarową przestrzenią Cantora, jeżeli X jest homeomorficzna z przestrzenią Cantora 2^ω i $\lambda : Bor(X) \to [0, \infty)$ jest σ-addytywną miarą borelowską, znikajacą na wszystkich singletonach przestrzeni X. Powiemy że dwie przestrzenie miarowe $(X, \lambda), (Y, \mu)$ są izomorficzne, jeżeli istnieje homeomorfizm h pomiędzy przestrzeniami X, Y taki, że dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \subseteq X$, $\lambda(B) = \mu(h[B])$.

Powiemy, że odwzorowanie $h : X \to X$ jest niezmiennicze względem λ, jeżeli dla każdego zbioru borelowskiego $B \subseteq X$, $\lambda(h[B]) = \lambda(B)$. Więcej, mówimy że σ-ideał $\mathcal{I}$ określony na (X, λ) jest niezmienniczy względem miary λ jeżeli dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{I}$ i homeomorfizmu $h : X \to X$ zachowującego miarę λ mamy $h[A] \in \mathcal{I}$.

Wiadomo, że istnieje miara λ na zbiorze Cantora X taka, że grupa $\mathcal{H}_\lambda(X)$ wszystkich homeomorfizmów zachowującą miarę λ zawiera tylko jeden element $\{id_X\}$. Wtedy każdy σ-ideał na X z bazą borelowską jest niezmienniczy względem miary λ. Więc takich ideałów jest $2^\mathfrak{c}$.

Miarową przestrzenią Cantora (X, λ) nazywamy dobrą, jeżeli dla dowolnego niepustego zbioru otwartego $U \subseteq X$ $\lambda(U) > 0$ i λ jest jednorodna w takim sensie: dla dowolnych zbiorów domknięto-otwartych $U, V \subseteq X$ takich że $\lambda(U) < \lambda(V)$, istnieje domknięto-otwarty podzbiór $U' \subseteq V$ taki że $\lambda(U) = \lambda(U')$.

Akin w pracy [Akin] udowodnił, że każde dwie dobre miarowe przestrzenie Cantora $(X, \lambda), (Y, \mu)$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy spektra miar $\lambda(Clopen(X))$ i $\mu(Clopen(Y))$ są równe. Tutaj przez spektrum $\lambda(Clpoen(X))$ rozumiemy następujący zbiór

$$\{\lambda(U) : \ U \subseteq X \text{ jest domknięto-otwarty w } X\}.$$

Głównym wynikiem, jest udowodnione przez nas następujące twierdzenie.

Twierdzenie 55 (P6, Thm. 1.1). *Każdy nietrywialny, niezmienniczy σ-ideał z analityczną bazą na dobrej miarowej przestrzeni Cantora (X, λ), jest jednym z następujących σ-ideałów*

$$\mathcal{E},\ \mathcal{M} \cap \mathcal{N},\ \mathcal{M},\ \mathcal{N}.$$

Tutaj $\mathcal{E}$ jest σ-ideałem generowanym przez domknięte zbiory miary zero względem λ równej zero. Mamy następujący diagram

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathcal{M} \arrow[dr] & \\
{[X]^{\leq 0}} \arrow[r] & {[X]^{\leq \omega}} \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \arrow[ur] \arrow[dr] & & P(X) \\
 & & & & \mathcal{N} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

W dowodzie twierdzenia 1.1 z omawianej pracy, odgrywa istotną rolę jednorodność. Następujące lematy, które mogą być rozważane jako oddzielne wyniki, były użyte w dowodzie tego twierdzenia.

Lemat 3 ([P6], Lemma 2.4). *Każdy zachowujący miarę homeomorfizm $h : A \to B$ pomiędzy dwoma domkniętymi nigdziegęstymi zbiorami $A, B \subseteq X$ dobrej miarowej przestrzeni Cantora (X, λ), rozszerza się do homeomorfizmu $f : X \to X$ przestrzeni X, który zachowuje miarę.*

Lemat 4 ([P6], Lemma 2.5). *Jeżeli $(X, \lambda), (Y, \mu)$ są dwiema miarowymi przestrzeniami Cantora takimi że $\lambda(X) < \mu(Y)$. Jeżeli $G_X \subseteq X$, $G_Y \subseteq Y$ są zbiorami G_δ o zerowej mierze względem λ, μ odpowiednio i G_Y jest zbiorem gęstym w Y, to istnieje zachowujące miarę zanurzenie $f : X \to Y$ takie, że $f[G_x] \subseteq G_Y$.*

Lemat 5 ([P6], Lemma 2.7). *Jeżeli $A \subseteq X$ jest domkniętym podzbiorem dobrej miarowej przestrzeni Cantora (X, λ) o dodatniej mierze $\lambda(A) > 0$, to dla każdej dodatniej liczby $\epsilon > 0$ istnieje skończony zbiór homeomorfizmów $h_1, \ldots, h_n$ przestrzeni X zachowujących miarę λ o tej własności że*

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} h_i[[A]]) > \lambda(X) - \epsilon.$$

Lemat 6 ([P6], Lemma 2.10). *Dla dowolnych dwóch F_σ zbiorów pierwszej kategorii Baire'a $A, B \subseteq X$ w dobrej miarowej przestrzeni Cantora (X, λ), takich że $\lambda(A) = \lambda(B) = \lambda(X)$, istnieje zachowujący miarę homeomorfizm $h : X \to X$, taki że $h[A] = B$.*

Lemat 7 ([P6], Lemma 2.11). *Jeżeli analityczny podzbiór $A \subseteq X$ w miarowej przestrzeni Cantora (X, λ) nie jest elementem σ-ideału $\mathcal{E}$, to A zawiera G_δ zbiór $G \subseteq A$ taki, że $\lambda(G) = 0$ i $\lambda \restriction \overline{G}$ jest miarą ściśle dodatnią (tzn. przyjmuje dodatnie wartości na niepustych zbiorach otwartych w przestrzeni $\overline{G}$).*

Wspólnie z Maciejem Burneckim, rozważaliśmy zagadnienia dotyczące tzw. **ubogich-topologii** na grupie G transformacji odcinka $\mathbb{I} = [0, 1]$ zachowujących σ-ideał zbiorów miary Lebesgue'a równej zero. Topologie te są definiowane poprzez funkcję Orlicza $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, która spełnia tak zwany warunek Δ' ze stałą $c > 0$.

Pierwszym wynikiem w pracy $[P7]$ jest twierdzenie które mówi, że jeśli funkcja Orlicza spełnia warunek Δ' ze stałą $c > 0$ i jeżeli $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ jest funkcją borelowsko mierzalną, dla której istnieje stała $\lambda > 0$ taka, że dla każdego $x \in [0, \infty)$ $h(x) \leq \varphi^{-1}(\lambda x)$, to dla dowolnego wybranego $\tau \in G$ i $f \in L^0(m)$, przekształcenie

$$T_\tau^{(h)} = (f \circ \tau^{-1})(h \circ \omega_\tau)$$

jest ograniczonym, liniowym operatorem na przestrzeni Orlicza $L^\varphi(m)$ oraz zachodzi nierówność:

$$\|T_\tau^{(h)}\|_\varphi \leq \max\{1, \mathfrak{c}\lambda\}.$$

Tutaj m oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{I}$, ω_r jest pochodną Radona-Nikodyma miary $m \circ \tau$ dla $\tau \in G$ oraz $L^0(m)$ oznacza zbiór wszystkich m-mierzalnych funkcji.

Warunek Δ' gwarantuje ośrodkowość przestrzeni Orlicza $L^\varphi(m)$ oraz wspomniany wynik zapewnia, że zbiór

$$G_h = \{T_\tau^{(h)} : \tau \in G\}$$

jest ograniczony w przestrzeni operatorowej $\mathcal{L}(L^\varphi(m))$ względem silnej topologii operatorowej generowaną przez zbiory bazowe postaci:

$$V(P, \epsilon, x_1, \ldots, x_n) = \{Q \in \mathcal{L}(L^\varphi(m)) : (\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \ \|Q(x_i) - P(x_i)\| < \epsilon\}.$$

Co więcej, ośrodkowość przestrzeni Orlicza $L^\varphi(m)$ gwarantuje nam, że topologia na ograniczonym zbiorze $W \subseteq \mathcal{L}(L^\varphi(m))$, który jest G_δ, jest metryzowalna następująco

$$(\forall P, Q \in W) \left(d(P, Q) = \sum_{n \in \omega} \frac{\|P(f_n) - Q(f_n)\|}{2^n \|f_n\|} \right),$$

gdzie $\{f_n : n \in \omega\}$ jest ustalonym, przeliczalnym ośrodkiem przestrzeni Orlicza $L^\varphi(m)$. G_h jest obrazem odwzorowania T^h określonym przez

$$G \ni \tau \mapsto T^{(h)}(\tau) = T_\tau^h \in \mathcal{L}(L^\varphi(m)).$$

Przez $\Theta_{\varphi,h}$ oznaczamy topologię na grupie G indukowaną z topologii na G_h przez odwzorowanie $T^{(h)}$.

Głównym wynikiem tej pracy jest twierdzenie, które mówi, że wszystkie topologie $\Theta_{\varphi,h}$ są równe o ile φ spełnia warunek Δ', h jest dowolną borelowsko mierzalną funkcją na $[0, \infty)$ taką, że $h(0) = 0$ oraz spełnione są dwa następujące warunki:

- $(\exists \lambda > 0)(\forall x, y \in [0, \infty)) \ (|\varphi(h(x)) - \varphi(h(y))| \leq \lambda |x - y|)$,
- $(\exists \eta > 0)(\forall x, y \in [0, \infty)) \ (|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leq \eta |h(x) - h(y)|)$.

Wspomniane topologie były wprowadzone i badane na przestrzeniach L^p w pracy [CK] przez Choksiego i Kakutaniego, a następnie przeniesione na przestrzenie Orlicza przez Burneckiego [Burn].

Pierwsze moje prace naukowe dotyczyły zagadnień fizyki teoretycznej. W mechanice kwantowej występują dwa rodzaje nierozróżnialnych cząstek elementarnych mianowicie te, które mają spin (kwantowy moment krętu) ułamkowy i nazywamy je fermionami np. (protony, elektrony, kwarki), oraz cząstki o spinie całkowitym zwane bozonami jak na przykład fotony, które przenoszą oddziaływanie elektromagnetyczne, gluony odpowiedzialne za przenoszenie oddziaływań silnych, dwa bozony W i bozon Z pośredniczą w oddziaływaniach słabych. Zakaz Pauliego zabrania pojawienia się dwóch fermionów w jednym stanie kwantowym, natomiast bozony mogą występować w tym samym stanie kwantowym w dowolnej ilości. Wspomniane zjawisko oddziaływania wielu cząstek, daje sie opisać w tak zwanym formaliźmie drugiej kwantyzacji, gdzie podstawowymi operatorami działającymi na ośrodkowej przestrzeni Hilberta są tak zwane operatory kreacji a^+ i anihilacji a. Operatory kreacji i anihilacji dla bozonów spełniają następujące relacje: dla dowolnych $i, j \in n$ dla $n \in \omega$

$$a_i a_j^+ - a_j^+ a_i = \delta_{ij} 1 \ \wedge \ a_i a_j - a_j a_i = 0 \ \wedge \ a_i^+ a_j^+ - a_j^+ a_i^+ = 0 \qquad \textbf{CCR} \text{ - relacje},$$

natomiast dla fermionów mamy

$$a_i a_j^+ + a_j^+ a_i = \delta_{ij} 1 \ \wedge \ a_i a_j + a_j a_i = 0 \ \wedge \ a_i^+ a_j^+ + a_j^+ a_i^+ = 0 \qquad \textbf{ACR} \text{ - relacje}.$$

W ramach formalizmu drugiej kwantyzacji John Bardeen, Leon Cooper i Robert Shrieffer zbudowali teorię, która wyjaśnia zjawisko nadprzewodnictwa w metalach w temperaturze bliskiej zera absolutnego. Podstawowym mechanizmem jest pojawienie się przy niskiej temperaturze takiego stanu kwantowego układu wielu cząstek w metalu, w którym dwa elektrony o przeciwnych spinach wiążą się tworząc bozon zwany parą Coopera. Pary Coopera mogą występować w tym samym stanie kwantowym w dowolnej ilości tworząc nadprzewodzący gaz, który nie oddziałuje z siecią krystaliczną metalu. Dodatkowym efektem tego stanu jest nie wnikanie do wnętrza metalu pola magnetycznego. Takie zjawisko nazywamy efektem Meissnera. Teoria BCS przewiduje przejście fazowe w stan nadprzewodzący w temperaturach znacznie nizszych od temperatury przejścia azotu ze stanu gazowego w stan ciekły. Jednak zjawisko przejscia w stan nadprzewodzący niektórych substancji o strukturze dalece różnej od symetrii krystalicznej zostało zaobserwowane eksperymentalnie. Szansą na wytłumaczenie tego fenomenu stanowi teoria qausicząstek zwanych "anyones", która została została przedstawiona we wspólnej pracy Leinassa i Myrhaima [LM] oraz w pracy Wilczka [Wil]. Wyżej wspomniane quasi-cząstki z powodzeniem stanowią podstawe wyjaśniającą kwantowy efekt Halla. W odróżnieniu od bozonów czy fermionów faza wielu cząstek może zmieniać się w sposób dowolny i cząstki te stanowią układ pośredni pomiędzy fermionami a bozonami. W związku z tym, w pracy [$P12$] i wspólnie napisanej z Władysławem Marcinkiem pracy [$P13$], badałem istnienie i własności algebr operatorowych określonych na tensorowych przestrzeniach ilorazowych jednocząstkowej przestrzeni Hilberta. Algebry te stanowią uogólnienie algebr generowanych przez operatory bozonowe kreacji i anihilacji, czy też ich odpowiedniki fermionowe:

$$a_i a_j^+ - \sum_{k,l} c_{ij}^{kl} a_k^+ a_l = \delta_{ij} 1, \quad a_i a_j - \sum_{kl} \tilde{b}_{ij}^{kl} a_k a_l = 0. \tag{1}$$

W wyniku rozważań otrzymałem warunek konieczny na istnienie takiej reprezentacji. Mianowicie, macierze $B = (b_{ij}^{kl})_{i,j,k,l \in \{1,\dots,n\}}$ and $C = (c_{ij}^{kl})_{i,j,k,l \in \{1,\dots n\}}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ są związane w sposób następujący:

$$(1 - B)(1 + \tilde{C}) = 1 \text{ gdzie } \tilde{c}_{ij}^{kl} = c_{jl}^{ik}. \tag{2}$$

Niech E będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Niech $TE = \bigoplus_{n \in \omega} E^{\otimes n}$ będzie algebrą tensorową. Ustalmy bazę $\{e_i\}_{i \in I}$ przestrzeni E dla $I \subseteq \mathbb{N}$. Niech $C : E \otimes E \to E \otimes E$ oraz $g(e_i \otimes e_j) = \delta_{ij}$. Dla dowolnych liczb naturalnych i, m takich, że $1 \leq i < m$, operator $C_m^{(i)}$: $E^{\otimes m+1} \otimes TE \to E^{\otimes m+1} \otimes TE$ określamy w sposób następujący:

$$C_m^{(i)}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_i \otimes x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_m \otimes x) = x_1 \otimes \ldots \otimes C(x_i \otimes x_{i+1}) \otimes \ldots \otimes x_m \otimes x.$$

Operator $h^{(m)} : E^{\otimes m+1} \to E^{\otimes m-1}$ jest definiujemy następująco:

$$h_m = \sum_{k=1}^{m} (1_{k-1} \otimes g \otimes 1_{(m-k)}) C_m^{(k-1)} \ldots C_m^{(0)},$$

Jeśli równanie (2) jest spełnione i dodatkowo założymy że zachodzi

- $\tilde{B}^{(2)} C^{(1)} C^{(2)} = C^{(1)} C^{(2)} \tilde{B}^{(1)}$ oraz
- $[h^{(1)} h^k C^{(k-1)} \ldots C^{(1)} + \ldots + h^{(k-2)} C^{(k-3)} \ldots C^{(1)} h^{(2)}](1 - \tilde{B}^{(1)}) = 0$ dla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$,

to taka operatorowa reprezentacja caąstek spełniających równanie (1) istnieje.

Jeżeli założymy, że operator C ma normę operatorową na przestrzeni Hilberta $E \otimes E$ nie większą od 1, to operator położenia określony następująco

$$E \ni f \mapsto \phi(f) = (a(f) + a^+(f))/\sqrt{2}$$

jest istotnie samosprzężony na przestrzeni Focka $\mathcal{F}$, która jest pewną ilorazową algebrą tensorową z pewnym iloczynem skalarnym. Dla dowolnych $x, y \in E^{\otimes n+1}$ ten iloczyn skalarny jest określony następująco:

$$< x, y >_C = < x, P_{n+1} y >_0 \wedge P_{n+1} = (1 \otimes P_n) R_{n+1} \wedge R_{n+1} = 1 + C_{n+1}^{(1)} + \ldots + C_m^{(1)} \ldots C_m^{(n)},$$

gdzie

$$< u_1 \otimes \ldots \otimes u_n, v_1 \otimes \ldots \otimes u_m >_0 = \delta_{n,m} \prod_{i=1}^{n} < u_i, v_i >, \text{dla iloczynu} < \cdot, \cdot >: E^2 \to \mathbb{C},$$

dla dowolnych $u_1, \ldots u_n, v_1, \ldots v_m \in E$. W przestrzeni Focka $\mathcal{F}$, operatory kreacji są sprzężone do operatorów anihilacji i vice versa.

Przykładami takich algebr są oczywiście algebry generowane przez bozony, czy też fermiony. Ponadto, dla dowolnych liczb zespolonych $q_i \in \mathbb{C}$ takich, że dla dowolnego $i \leq dimE$ $|q_i| = 1$ i macierze w przypadku tzw. kolorowych bozonów wyrażają się następująco:

$$b_{ij}^{kl} = \tilde{b}_{ij}^{kl} = q_j \bar{q}_i \delta_{il} \delta_{jk} \wedge c_{ij}^{kl} = q_i \bar{q}_j \delta_{il} \delta_{jk},$$

kolorowych fermionowych statystyk:

$$b_{ij}^{kl} = \tilde{b}_{ij}^{kl} = -q_j \bar{q}_i \delta_{il} \delta_{jk} \wedge c_{ij}^{kl} = -q_i \bar{q}_j \delta_{il} \delta_{jk}.$$

Natomiast operatorowe algebry określone przez macierze

$$\tilde{b}_{ij}^{kl} = 1 \wedge c_{ij} = q^{2\delta_{ij}}$$

generowane są przez operatory kreacji i anihilacji związane ze sobą w sposób następujący:

$$b_i b_j^+ - q^{2\delta_{ij}} b_j^+ b_i = \delta_{ij} 1 \wedge b_i b_j - b_j b_i = 0 = b_i^+ b_j^+ - b_j^+ b_i^+.$$

Stosując odpowiednią transformacje na wyżej opisanych operatorach b_i, b_j^+, zaproponowaną przez Chaichiana Grossa i Presnajdera [CGP] otrzymujemy zdeformowaną algebrę $SU_q(n)$ pochodzącą od Pusza i Woronowicza [PW] generowaną przez operatory A_i, A_j^+ o relacjach zdefiniowanych w sposób:

$$A_i A_j = q A_j A_i \quad \wedge \quad A_j^+ A_i^+ = q A_i^+ A_j^+ \quad \text{dla } i < j,$$

$$A_i A_j^+ = q A_j^+ A_i \quad \text{dla } i \neq j,$$

$$A_i A_i^+ - q^2 A_i^+ A_i = 1 - (1 - q^2) \sum_{k>i} A_k^+ A_k.$$

W pracy $[P10]$ wyznaczyłem jądro skręconego iloczynu skalarnego określonego na produkcie tensorowym TE n-wymiarowej przestrzeni zespolonej E. Iloczyn ten jest definiowalny z operatora $T : E \otimes E \to E \otimes E$ następująco

$$(\forall i, j \in \{1, \ldots, n\})(q_{i,j} \in \mathbb{C})\ T(e_i \otimes e_j) = q_{i,j} e_j \otimes e_i \wedge |q_{i,j}| = 1 \wedge q_{i,j} = \overline{q_{j,i}}.$$

Wtedy dla $x, y \in TE$ iloczyn dany jest formułą $\langle x, y \rangle_T = \langle x, Py \rangle_0$, gdzie dla $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in E$

$$\langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n, y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \rangle_0 = \delta_{n,m} \prod_{i=1}^{n} \langle x_i, y_i \rangle.$$

Operator rzutowania $P = \bigoplus_{n \in \omega} P_n$ jest określony na TE oraz dla $n \in \omega$

$$P_n = (1 + T_1^n) \ldots (1 + T_{n-1}^n + \ldots + T_{n-1}^n \cdots T_1^n \in End(E^{\otimes n})).$$

Wówczas, jeżeli $dimE \geq 2$, to $ker\langle \cdot, \cdot \rangle_T = \{x \in TE :\ \langle x, x \rangle_T\} = \bigoplus_{n \in \omega} Z_n$ gdzie

$$Z_n = \{x \in E^{\otimes n} :\ x = \sum_{\bar{i}} (\sum_{\sigma \in G_{\bar{i}}} \alpha_{\sigma, \bar{i}} F(\sigma)) e_{\bar{i}} \longrightarrow (\forall \bar{i} = (i_1, \ldots, i_n)) \sum_{\sigma \in G_{\bar{i}}} \alpha_{\sigma, \bar{i}} = 0\},$$

$G_{\bar{i}} = Imf_{\bar{i}}, \bar{i} = (i_1, \ldots, i_n)$, $f_{\bar{i}}((j_1, \ldots, j_n)) = \sigma \in S_n$ oraz permutacje σ spełnia warunek $\sigma(j_1, \ldots, j_n) = \bar{i} = (i_1, \ldots, i_n)$.

Ponadto, w tej samej pracy wyznaczyłem sumę statystyczną dla wielkiego zespołu kanonicznego mieszanego układu cząstek bozonowych i fermionowych opisanego przez algebrę Manina. Algebra ta jest określona przez operator skręcenia kwantowego $T \in End(E \otimes E)$, który działa na kwadracie tensorowym D-wymiarowej przestrzeni E nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ z ustalona bazą ortonormalna $\{e_i : i \in \{1, \ldots, k\}\} \cup \{f_j :\ j \in \{1, \ldots, D - k\}\}$

$$T(e_i \otimes e_i) = e_i \otimes e_i \wedge T(f_j \otimes f_j) = -f_j \otimes f_j,$$

$$i \neq j \longrightarrow T(e_i \otimes e_j) = q_{i,j} e_j \otimes e_i \wedge T(f_i \otimes f_j) = q_{i+k,j+k} f_j \otimes f_i,$$
$$T(e_i \otimes f_j) = q_{i,j+k} f_j \otimes e_i.$$

Tutaj liczby zespolone $q_{i,j} \in \mathbb{C}$ spełniają zależność
$$q_{i,j} \cdot \overline{q_{i,j}} = 1 \wedge q_{i,j} = \overline{q_{j,i}}.$$
Wówczas dla hermitowskiego operatora h określonego na wspomnianej bazie przestrzeni E, $h(e_i) = \epsilon_i e_i$ $h(f_j) = \eta_j f_j$ dla ustalonych liczb rzeczywistych $\epsilon_i, \eta_j \in \mathbb{R}$ odpowiadającym energiom własnym cząstek bozonowych i fermionowych, suma statystyczna na n-cząstkowej przestrzeni $E^{\otimes n}$ przedstawia się następująco
$$tr(P_n e^{d\Gamma_n(h)}) = \prod_{i=1}^{k}(1 - e^{\epsilon_i})^{-1} \prod_{j=1}^{D-k}(1 + e^{\eta_j}),$$
$d\Gamma_n(h) = h \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes h \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes h.$

We wspólnych pracach $[P8]$, $[P9]$ oraz $[P11]$ z Romanem Gielerakiem, rozważaliśmy układy quasi-cząstek Leinaasa-Myrheima z zadanymi relacjami komutacji operatorów kreacji i anihilacji
$$\begin{cases} a_r(x)a_r(y)^+ - e^{ir(x,y)}a_r(y)^+a_r(x) & = \delta(x-y)1 \\ a_r(x)a_r(y) - e^{ir(x,y)}a_r(y)a_r(x) & = 0 \\ a_r(x)^+a_r(y)^+ - e^{ir(x,y)}a_r^+(y)a_r^+(x) & = 0, \end{cases}$$
($r : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ i $r(x,y) + r(y,x) = 0$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^d$). h jest tu zadanym jednocząstkowym hamiltonianem $h = h_V = -\Delta^\sigma + \mu$, gdzie $\sigma \in C^3(\partial V)$ stanowi warunek brzegowy klasy C^3 na zadanej objętości $V \subseteq \mathbb{R}^d$ i Δ^σ jest operatorem Laplace'a, natomiast μ jest potencjałem chemicznym i $\beta > 0$ jest tak zwaną temperaturą odwrotną. Pokazaliśmy istnienie granicy termodynamicznej gęstości energii swobodnej
$$\lim_{V \nearrow \mathbb{R}^d} \frac{\ln Z_V^r(\beta, \mu)}{|V|}$$
w skończonej objętości wielkiego zespołu kanonicznego Gibbsa:
$$Z_V^r(\beta, \mu) \equiv Tr_{\Gamma_r(h_V)} \Gamma_r(e^{-\beta h(\mu)}).$$
Tutaj $\Gamma_r(h_V)$ rozumiemy moduł Focka jako algebrą ilorazową powstałą z algebry tensorowej $T(H)$ przez dwustronny ideał generowany przez wyżej określone relacje komutacji operatorów kreacji a_r^+ i anihilacji a_r ($H = H_V = L^2(V)$ oznacza jednocząstkową przestrzeń Hilberta wszystkich funkcji całkowalnych z kwadratem na V, na której działa hamiltonian h_V). Od jednocząstkowego hamiltonianu żądamy dodatkowo, aby istniał ślad $tr_H(e^{-\beta h_V(\mu)})$ na przestrzeni jednocząstkowej H. Nadmienię tutaj, że powyższy wynik stanowi punkt wyjścia do badania przemian fazowych quasi-cząstek Leinaasa-Myrheima.

Ostatnie trzy prace $[P14]$, $[P15]$ oraz $[P16]$ dotyczą pewnych zagadnień z chemii fizycznej. Wspólnie z Mirosławem Kozłowskim oraz Hubertem Kołodziejem badaliśmy zachowanie odpowiedzi dielektrycznej w dziedzinie czasowej i częstotliwościowej dla związków chemicznych posiadających pewną strukturę krystaliczną.

Literatura

[Akin] E. Akin, Good measures on Cantor space, Tran. Amer. Math. Soc. vol. 357:7 (2005), pp. 2681-2722.

[BaKu] S. Banach, K. Kuratowski, Sur une generalisation du probleme de la measure, Fund. Math. vol. 14, no. 1 (1920), pp. 127-131.

[Bart] T. Bartoszyński, Combinatorial aspects of measure and category, Fund. Math. vol. 127(3) (1987), pp. 225-239.

[BartJud] T. Bartoszyński, H. Judah, Set theory: on the structure of the real line, A K Peters, Ltd. Wellesley Massachusetts, 1995.

[BJS] T. Bartoszyński, H. Judah, S. Shelah, The Cichoń diagram, The Journal of Symbolic Logic 58 (1993), no. 2, 401-423

[BCGR] J. Brzuchowski, J. Cichoń, E. Grzegorek, Cz. Ryll-Nardzewski, On the existence of nonmeasurable unions, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. vol. 27, no. 6 (1997), pp. 447-448.

[Bu] L. Bukovsky, Any partition into Lebesgue measure zero sets produces a nonmeasurable set. Bull. Acad. Polon. Sci.no Sér. Sci. Math. vol. 27, no. 6 (1979), no. 6, pp. 431–435.

[Burn] M. Burnecki, Invertible transformations acting on Orlicz spaces, Arch. Math. (Basel) 70 (1998), pp. 319-330.

[C] J. Cichoń, On two-cardinal properties of ideals, Trans. Amer. Math. Soc., 314(2) (1989), pp. 693-708.

[CJ] J. Cichoń, A. Jasiński, A note on algebraic sums of subsets of the real line, Real Anal. Exch. vol. 28, no. 2 (2002/2003), pp. 493-499.

[CKP] J. Cichoń, A. Kamburelis, J. Pawlikowski, On dense subsets of the measure algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1985), pp. 142-146.

[CS] J. Cichoń, P. Szczepaniak, Hamel-isomorphic images of the unit ball, Math. Log. Quart. vol. 56, no. 6 (2010), pp. 625-630.

[CKW] J. Cichoń, A. Kharazishvili and B. Węglorz, On sets of Vitali's type, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 1243-1250

[CGP] M. Chaichian, H. Grosse, P. Presnajder, Unitary representations of the q-oscillator algebra. J. Phys. A: Math. Gen. 27 (1994), 2045.

[CK] J. R. Choksi, S. Kakutani, Residuality of ergodic measurable transformations and of ergodic transformations which preserve an infinite measure, Indiana Math. J. 28 (1979), pp. 453-469.

[CFF] K. Ciesielski, H. Fejzić, Ch. Freiling, Measure zero sets with nonmeasurable sum, Real Anal. Exch. vol. 27, no. 2 (2001-2002), pp. 783-793.

[DK] U. B. Darji and T. Keleti, Covering R with translates of a compact set, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 8, 2593–2596.

[Frem] D. Fremlin, Measure-additive coverings and measurable selectors, Dissertationes Math. 260 (1987), pp. 116.

[FrTod] D.Fremlin, S. Todorcević, Partition of $[0, 1]$ into negligible sets, 2004, preprint dostępny na stronie http://www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin/preprints.htm

[Gold] M. Goldstern, Tools of your forcing construction, Israel Journal Conference Proceedings, 6 (1992), pp. 307-362.

[JMS] H. Judah, A. Miller, S. Shelah, Sacks forcing, Laver forcing and Martin's Axiom, Archive for Math Logic 31 (1992) 145-161.

[Kucz] M. Kuczma, An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Brikhauser Verlag AG, (2009), pp. 1-595.

[Ku] K. Kuratowski, A certain theorem on ideals, and its applications to the Baire property of Polish spaces, Uspehy Mat. Nauk, 31 (1976) no 5 (191), pp. 108-111.

[Kuzn] Y. Kuznetsova, On continuity of measurable group representations and hommomorphisms, Studia Math. 210, no. 3 (2012), 197–208

[Kys1] M. Kysiak, Nonmeasurable algebraic sumsof sets of reals, Colloquium Mathematicum, vol. 102, no. 1 (2005), pp. 113-122.

[Kys2] M. Kysiak, Bernstein sets with algebraic properties, Central European Journal of Mathematics 7(4) (2009), pp. 725-731.

[Leb] H. Lebesgue, Lecons sur l'integration, I-re ed. 1904, II-me 1928, p. 110.

[Lar] D. G. Larman, A problem incidence, Journal of London Math. Soc. vol. 43 (1968), pp. 407-409.

[LM] J.M. Leinaas, J. Myrheim, Nuovo Cimento 37B (1977) 1.

[Mi] A. Miller, Infinite combinatorics and definability, Ann. Pure Appl. Logic vol. 41 no 2, (1989), pp. 179-203.

[Mu] K. Muthuvel, Application of covering sets, Coll. Math. vol. 80, (1999), pp. 115-122.

[Now1] A. Nowik, Some topological properties of ω-covering sets. Czechoslovak Journal of Mathematics, 50(125), (2000), pp. 865-877.

[Now2] A. Nowik, On extended version of $\aleph_0$-covering sets and their applications, Tatra Mt. Math. Publ. vol. 35, (2007), pp. 13-23.

[PW] S. Woronowicz and W. Pusz, Twisted second quantization, Rep. Math. Phys. 27 (1989), pp. 231-257.

[Rep] Repicky, M., Perfect sets and collapsing continuum, Comment. Math. UnivCarolin. 44,2 (2003) 315–327.

[Sh] S. Shelah, Proper and improper forcing, Lecture notes in Mathematics, 2nd ed., 940, XLVII, p. 1020.

[Sier] W. Sierpiński, Sur la question de la measurabilite de la base de M. Hamel, Fundamenta Mathematicae 1 (1920), pp. 105–111.

[So1] R. M. Solovay, A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Annals of Mathematics, vol. 92 (1970), pp. 1-56.

[So2] R. M. Solovay, Real-valued measurable cardinals. Axiomatic set theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, s. 397-428.

[Ulam] S. Ulam, Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, Fundamenta Mathematicae, vol. 16, no. 1 (1930), pp. 140-150.

[Wil] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 48 (17) (1982) 1144.

[Vitali] G. Vitali, Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta. „Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani", 1905.

[Zapl] J. Zapletal, Forcing Idealized, Cambrigde Tracts in Mathematics, (2008).
[Zeb] Sz. Żeberski, On completely nonmeasurable unions, Mathematical Logic Quarterly 53(1) (2007), pp.38-42.

Rałowski