Poznań, 20.07.2013 r.

Prof. dr hab. Ryszard Płuciennik
Instytut Matematyki
Wydział Elektryczny
Politechnika Poznańska

Recenzja rozprawy habilitacyjnej „Nierówności funkcyjne o wielu zmiennych" i dorobku naukowego doktora Włodzimierza Fechnera.

1. *Wstęp*

Na rozprawę habilitacyjną pt. „*Nierówności funkcyjne o wielu zmiennych*" doktora Włodzimierza Fechnera składa się 7 prac oznaczonych w autoreferacie symbolami [F1-F7]. Żadna z nich nie jest współautorska, a zatem odpada problem wyważenia wkładu autora. Prace te ukazały się w następujących czasopismach o zasięgu międzynarodowym: Mathematical Inequalities & Applications (25 pkt. - jedna praca), Aequationes Mathematicae (30 pkt. - dwie prace), Journal of Mathematical Analysis and Applications (40 pkt. - dwie prace), Indagationes Mathematicae (15 pkt. - jedna praca) oraz Journal of Mathematical Inequalities (jedna Praca). Są to prace zwarte i krótkie. Najdłuższa z nich liczy 9 stron.

W cyklu habilitacyjnym prac [F1-F7] autor zajmuje się głównie zagadnieniami teorii nierówności funkcyjnych. Prace są ułożone w porządku chronologicznym według dat opublikowania. W autoreferacie omawiane są w kolejności ich powstawania, co jest uzasadnione z uwagi na to, że są one ze sobą powiązane, a stopień złożoności rozwiązywanych problemów rośnie w kolejnych pracach. Dlatego, podobnie jak autor rozprawy, omawianie zawartości prac rozpocznę od pracy [F4]. Inspiracją do jej napisania były pewne rezultaty J. Dhombresa i R. Gera dotyczące problemu występowania efektu alienacji dla dwóch danych nierówności, tj. znalezieniu warunków, przy których dowolne rozwiązanie nierówności będącej sumą dwóch danych nierówności spełnia każdą z nich. Najważniejszy wynik pracy [F1] jest zawarty w twierdzeniu 1 (twierdzenie 2 w autoreferacie), które orzeka, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła i różniczkowalna w zerze spełnia nierówność

$$f(x+y) + bf(xy) \geq f(x) + f(y) + cf(x)f(y), \quad b, c \in R \setminus \{0\}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$ lub

$$f(x) = \frac{ac-b}{ac^2}[e^{acx} - 1] + \frac{b}{c}x, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $a = f'(0)$, $ac > 0$ i $(ac-b)bc \geq 0$. W przypadku, gdy $b = c = 1$ uzyskuje się klasyczne twierdzenie C. Hammera. Wprowadzenie stałych b i c bardzo komplikuje procedurę wyreprezentowania funkcji f spełniającej powyższą nierówność, o czym bardziej szczegółowo wypowiem się przy okazji oceny dorobku. Ponadto autor zauważa, że efekt alienacji dla układu nierówności

$$\begin{cases} f(x+y) \geq f(x) + f(y), & x, y \in \mathbb{R}, \\ bf(xy) \geq cf(x)f(y), & x, y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$ lub $f'(0) = b/c$. Przypadki $b = 0$ i $c = 0$ autor zbadał odrębnie.

Inspiracją do napisania prac [F1], [F2] i [F3] była identyczność

$$||x| - |y|| = |x+y| + |x-y| - |x| - |y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

podana przez A. Tarskiego, prawdziwa wyłącznie na zbiorze liczb rzeczywistych, oraz nierówność

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| + \|x-y\| - \|x\| - \|y\| \leq \min\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

zachodząca w dowolnej przestrzeni unormowanej, zauważona przez L. Maligrandę. Zastąpienie w identyczności Tarskiego wartości bezwzględnej, natomiast w nierówności Maligrandy normy przez funkcję o wartościach rzeczywistych doprowadziło do równania funkcyjnego

$$|f(x) - f(y)| = f(x+y) + f(x-y) - f(x) - f(y), \quad x, y \in G, \tag{1}$$

oraz nierówności funkcyjnej

$$|f(x) - f(y)| = f(x+y) + f(x-y) - f(x) - f(y) \leq \min\{f(x+y), f(x-y)\}, x, y \in G, \tag{2}$$

gdzie $(G, +)$ jest grupą abelową i $f : G \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją.

W pracy [F1] autor wykazał, że jedynymi funkcjami spełniającymi równość (1) są funkcje postaci $f(\cdot) = |A(\cdot)| + c$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$ oraz pewnego odwzorowania addytywnego $A : G \to \mathbb{R}$. Udowodnił także stabilność w sensie Hyersa-Ulama tego równania. Ponadto wykazał, że funkcja f znikająca w zerze spełnia nierówność (2) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ taka, że $f(\cdot) = \|A(\cdot)\|$ dla pewnego odwzorowania addytywnego $A : G \to X$.

Na bazie wyników uzyskanych w pracy [F1] oraz pewnych rezultatów Chajlub-Simon i Volkmanna zrodził się pomysł zbadania odpowiednich nierówności funkcyjnych (nazwanych za A. Gilányi) typu Volkmanna. Podstawowe własności tych nierówności są zbadane w pracy [F3]. Z uwagi na specyfikę uzyskanych wyników, porównuje się je między innymi ze znanymi klasycznymi nierównościami takimi jak nierówność podaddytywności i nierówność quasiwypukłości w sensie Jensena.

W pracy [F2] autor rozważa kolejne trzy nierówności funkcyjne motywowane przez nierówność Maligrandy. Ich wspólną cechą jest to, że należą do klasy nierówności funkcyjnych ze złożeniami, tzn. takich, w których funkcja niewiadoma występuje również jako swój argument. W tej sytuacji metody wykorzystywane w przypadku klasycznych nierówności funkcyjnych nie przynoszą pożądanych efektów. Uważam, że największą zaletą pracy [F2] jest wypracowanie metody skutecznej w wyznaczaniu rozwiązań tego typu nierówności.

Do problemu nierówności funkcyjnych ze złożeniami autor wraca w pracy [F6]. Sięga w niej po klasyczne równanie operatorów uśredniających

$$T(f * Tg) = Tf * Tg, \quad f, g \in \mathcal{A},$$

gdzie $(\mathcal{A}, \cdot)$ jest pewną strukturą algebraiczną oraz $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jest operatorem liniowym. W pracy tej autor koncentruje się na nierówności

$$T(f * T(g)) \geq T(f) * T(g), \quad f, g \in \mathcal{A},$$

gdzie $*$ może być zarówno działaniem multiplikatywnym jak i addytywnym. Należy podkreślić, że badając ten problem autor rezygnuje z założenia liniowości operatora T, co w konsekwencji znacznie osłabia informację płynącą z tej nierówności. Dlatego, praca [F6] rozpoczyna się od kilku przykładów odwzorowań spełniających badaną nierówność i posiadających postać daleką od oczekiwanej. Dopiero po wzmocnieniu informacji niesionej przez nierówność dzięki dodaniu założenia, że $\mathcal{A}$ jest częściowo uporządkowanym pierścieniem z działaniem addytywnym, wnioskuje się, iż każde rozwiązanie suriektywne $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jest postaci

$$T(f) = f + T(0).$$

Autor wykazał także, że postać rozwiązania zachowuje się przy pewnych słabszych warunkach niż suriektywność.

Praca [F5] poświęcona jest nierówności funkcyjnej

$$f(x+y) + f(y+z) + f(x+z) \leq f(x+y+z) + f(x) + f(y) + f(z). \tag{3}$$

Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hlawki (odp. przestrzenią Hilberta) i $f(\cdot) = \|\cdot\|$ (odp. $f(\cdot) = \|\cdot\|^2$), to wyrażenie (3) przyjmuje postać nierówności, która jest prawdziwa w przestrzeni Hlawki (odp. w przestrzeni Hilberta). Autor otrzymał pełne rozwiązanie nierówności (3) przy pewnych warunkach jednorodnościowych na funkcję f. Bez zakładania tych warunków problem znalezienia rozwiązań stał się znacznie bardziej złożony nawet w przypadku, gdy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mimo to, zaledwie przy założeniu istnienia dla tej funkcji skończonych pochodnych Diniego na pewnym podzbiorze dziedziny, stosując własną metodę "różniczkowania stronami" w odniesieniu do pochodnych Diniego, autor uzyskał satysfakcjonujące rozwiązanie.

Ostatnia z prac cyklu habilitacyjnego [F7] poświęcona jest pewnej modyfikacji lematu Laxa-Milgrama. Przy słabszych założeniach autor uzyskuje słabszą tezę.

2. *Ocena dorobku naukowego zawartego w rozprawie habilitacyjnej*

Artykuł 16, ustęp 2 Ustawy mówi, że osiągnięcie naukowe może stanowić *„jednotematyczny cykl publikacji"*. Nie mam żadnych wątpliwości, że ten formalny warunek jest spełniony. Prace łączy nie tylko tematyka nierówności funkcyjnych, ale także stosowanie technik dowodowych, które wyraźnie rozwijały się z każdą kolejną pracą.

Wszystkie prace wchodzące w skład cyklu habilitacyjnego dr Włodzimierza Fechnera są starannie zredagowane. Podejmowany problem zawsze jest dobrze umotywowany na tle literatury światowej. Świadczy to pozytywnie jego dojrzałości naukowej. Wszystkie były opublikowane w latach 2010-2013. Biorąc pod uwagę czas jaki zwykle upływa do chwili zauważenia osiągnięcia i opublikowania pracy z jego wykorzystaniem, nie można oczekiwać dużej liczby cytowań. Dlatego w dalszym ciągu więcej miejsca poświęcę cytowaniom pozostałego dorobku naukowego. Prace te (z wyjątkiem [F7]) napisane są zwykle według schematu: znana nierówność w przestrzeni unormowanej, odpowiadająca jej nierówność funkcyjna i pytanie o rozwiązania i ich własności. Jednak, gdy się dokładnie wczytać w zawartość prac, to wbrew temu, co mógłby sugerować ten schemat, wyniki są wysoce nietrywialne, a prace [F2] i [F6] mogą okazać się pionierskie w badaniu nierówności funkcyjnych ze złożeniami. Autor zwykle dążył do uzyskania wyniku w możliwie najwyższej ogólności, a konieczność przyjęcia jakiegokolwiek założenia zawsze dokładnie motywował. Stopień zaawansowania technik dowodowych jest przyzwoity. Godnym podkreślenia jest fakt, że każda następna praca tego cyklu wymagała coraz bardziej wyrafinowanych modyfikacji tych technik. Wprowadzając w pracy [F4] metodę, którą nazwał "metodą różniczkowania stronami" rozwijał ją w kolejnych pracach, by w [F5] w przypadku znajdowania rozwiązań nierówności Hlawki (bez założenia jednorodności) skutecznie wykorzystać ją do pochodnych Diniego. Dalej, przechodząc przez lemat Rosenbauma, a następnie przez twierdzenie Denjoy-Young-Saksa, po kilku błyskotliwych krokach doszedł do tezy. Uważam, że jest to najtrudniejszy i najciekawszy dowód w habilitacyjnym cyklu prac. Bardzo dobre wrażenie zrobiło na mnie krytyczne podejście autora do modyfikacji twierdzenia Laxa-Milgrama. Uczciwie przyznaje, że nie zna przykładów zastosowań uzyskanego wyniku. Z drugiej strony przeprowadza merytoryczną analizę potencjalnych możliwości zastosowania tego twierdzenia. Krytycyzm wraz z umiejętnością analitycznego myślenia jest pożądaną cechą samodzielnego pracownika naukowego.

3. *Ocena dorobku i aktywności naukowej*

Według artykułu 16, ustęp 1 Ustawy, osoba starająca się o przyznanie stopnia doktora habilitowanego powinna wykazywać się *„istotną aktywnością naukową”*. Na liście publikacji, łącznie z cyklem habilitacyjnym, znajduje się 32 prace, w tym 22 w czasopismach znajdujących się w tzw. bazie JCR. Warto podkreślić, że wśród nich są czasopisma z „najwyższej półki” takie jak Journal of Mathematical Analysis and Applications (5 prac), Journal of Approximation Theory (1 praca), Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications (2 prace). Pozostałe z tych 22 prac ukazały się w bardzo dobrych lub dobrych czasopismach. Według bazy MathSciNet, odrzucając autocytowania, dr Fechner jest cytowany 25 razy przez 29 autorów (10.07.2013). Najczęściej cytowana (16 razy) jest praca [F9]. Jego indeks Hirscha wynosi 2. Jest to wynik dobry, zważywszy, że pierwsza publikacja doktora Fechnera ukazała się zaledwie 9 lat temu. Według mniej rzetelnej (ale niestety obowiązującej) bazy Web of Science jest cytowany 15 razy a jego indeks Hirscha również wynosi 2.

Tematyka tych prac dotyczy teorii równań i nierówności funkcyjnych oraz ich powiązań z innymi działami matematyki. Część z nich wiąże się z problemami stabilności w sensie Hyersa-Ulama równań i nierówności funkcyjnych, które cieszą się ostatnio dużym zainteresowaniem ([F9], [F10], [F13], [F16], [F28] (wspólna z J. Sikorską) i [F29] (wspólna z R. Gerem)). Tematyce porównywania średnich poświęcone są prace [F15], [F26] i [F32]. Problemy oddzielania funkcji i tzw. twierdzenia kanapkowe dla rozwiązań warunkowych równań funkcyjnych rozważane są w pracach [F20], [F25] i [F27] (wspólna z J. Sikorską). Zagadnienia alienacji dla odwzorowań kwadratowych i multiplikatywnych dotyczy praca [F19]. W pozostałych bada się rozmaite aspekty równań i nierówności funkcyjnych.

Poza publikowaniem był aktywny w wielu innych obszarach działalności naukowej i organizacyjnej. Dwukrotnie kierował rocznym projektem finansowanym przez MNiSW w ramach programów „*Iuventus Plus* 2011" i „*Iuventus Plus* 2012". Wygłaszał referaty na 22 międzynarodowych konferencjach naukowych. Warto podkreślić jego sześciokrotne uczestnictwo w prestiżowych konferencjach z cyklu ISFE (International Symposium on Functional Equations). Udział w nich wymaga imiennego zaproszenia i jest postrzegany jako wyróżnienie. Ponadto na 50-th ISFE Komitet Naukowy powierzył mu organizację Sesji Specjalnej „*Inequalities*" i na tymże jubileuszowym Sympozjum pan dr Fechner otrzymał „*Medal for Oustanding Contribution*" za swój referat „*Functional inequalities motivated by the Lax-Milgram theorem*" (tj. za wyniki zawarte w pracy [F7] wchodzącej w skład rozprawy habilitacyjnej). Jest członkiem dwóch komitetów redakcyjnych i jednego międzynarodowego towarzystwa naukowego. Odbył 5 krótkotrwałych zagranicznych wizyt naukowych: dwie na Uniwersytecie w Debreczynie (Węgry) i trzy na uniwersytecie w Ulm (Niemcy). Zrecenzował 37 prac do 16 różnych matematycznych czasopism naukowych. Warto podkreślić, że 30 z tych recenzji było wykonane dla czasopism znajdujących się w bazie JCR.

Za działalność naukową był dwukrotnie nagradzany.

Zaangażowanie doktora Fechnera w popularyzację matematyki jest znaczące. Corocznie jest jurorem konkursu *Epigramat* organizowanego dla uczniów szkół średnich w ramach "Święta liczby π", znanej w Polsce imprezy organizowanej przez Wydział Mat-Fiz-Chem Uniwersytetu Śląskiego. Wciąż współpracuje z Kołem Naukowym Matematyków Uniwersytetu Śląskiego, którego był prezesem w czasie swoich studiów. W 2005 roku był inicjatorem pierwszego ze spotkań „*International Students' Conference on Analysis*" przeznaczonych dla studentów i doktorantów Uniwersytetu Śląskiego i Uniwersytetu w Debreczynie. Pełnił rolę opiekuna indywidualnego toku studiów czwórki studentów sekcji teoretycznej matematyki na Uniwersytecie Śląskim. Jego aktywność w tym zakresie daje podstawę do stwierdzenia, że jest pasjonatem matematyki i stara się tę pasję przekazać młodszym, co jest ważną cechą nauczyciela akademickiego.

4. *Podsumowanie i konkluzja.*

Jestem przekonany, że dr Włodzimierz Fechner jest dojrzałym matematykiem i zaangażowanym nauczycielem akademickim. Posiada znaczący dorobek naukowy opublikowany w renomowanych czasopismach o zasięgu międzynarodowym. W mojej ocenie jest dobrym kandydatem na samodzielnego pracownika naukowego.

W konkluzji stwierdzam, że osiągnięcia naukowe doktora Włodzimierza Fechnera uzyskane w jednotematycznym cyklu prac pt. „Nierówności funkcyjne o wielu zmiennych" oraz pozostały jego dorobek naukowy spełniają ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego. W związku z tym wnoszę o dopuszczenie doktora Fechnera do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.