

# Twierdzenie o (ekwi)partycji energii: Układy klasyczne vs kwantowe

Jerzy Łuczka  
*Instytut Fizyki, Uniwersytet Śląski, Chorzów*

1. Mechanika klasyczna - Isaac Newton 1687

$$ma = F$$

2. Elektrodynamika klasyczna - James Clerk Maxwell 1861

$$dF = 0 \quad d * F = 0$$

3. Mechanika relatywistyczna - Albert Einstein 1905

$$E = mc^2$$

4. Mechanika kwantowa - Max Planck (1900); Erwin Schrödinger 1925

$$H\Psi = E\Psi$$

## 5. Klasyczna mechanika statystyczna - Ludwig Boltzmann 1876

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} k_B T, \quad k_B = 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$$

Po raz pierwszy w teorii fizycznej występuje opis probabilistyczny:

$\langle E_k \rangle$  jest wartością średnią

Łamany jest dogmat determinizmu i pewności przewidywania. Pojawia się losowość, którą później zaraziła się mechanika kwantowa i dręczy Einsteina

$$\langle E_k \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T, \quad k_B = 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$$

Ta formuła mówi, że dla układów klasycznych w stanie równowagi termodynamicznej energia kinetyczna jednego stopnia swobody cząstki

zależy tylko od temperatury

Jest ona

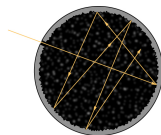
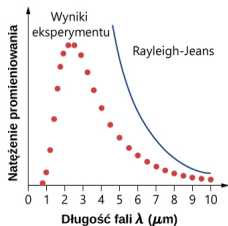
UNIWERSALNA

w tym sensie, że nie zależy od masy cząstki, ilości cząstek w układzie, postaci oddziaływania między cząstkami i postaci oddziaływania z otoczeniem

WAŻNE:

$$T \rightarrow 0 \quad \text{to} \quad \langle E_k \rangle \rightarrow 0$$

# Prawo Rayleigha-Jeansa (1900)



Katastrofa nadfioletowa

$$I \sim \frac{kT}{\lambda^4}$$

Jedna z przyczyn powstania mechaniki kwantowej !!!

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{4} \operatorname{ctgh} \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T} \quad (\text{Max Planck 1900})$$

zależy nie tylko od temperatury

Graniczne przypadki:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} k_B T, \quad \omega_0 \rightarrow 0 : \text{cząstka swobodna}$$

$$\langle E_k \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{4}, \quad T \rightarrow 0$$

Okazuje się, że wzór Plancka jest przybliżeniem ogólniejszego prawa !!

# Partycja energii dla układów kwantowych

$$\langle E_k \rangle = \int_0^{\infty} \mathcal{E}_k(\omega) \mathbb{P}(\omega) d\omega$$

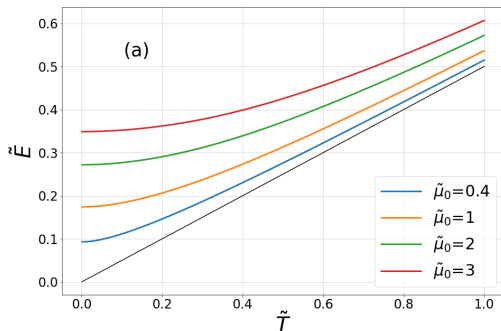
gdzie

$$\mathcal{E}_k(\omega) = \frac{\hbar\omega}{4} \operatorname{ctgh} \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right)$$

jest energią kinetyczną oscylatora harmonicznego oraz  $\mathbb{P}(\omega)$  jest rozkładem prawdopodobieństwa (możliwych częstości oscylatorów termostatu).

Teraz  $\langle E_k \rangle$  zależy od wszystkiego: temperatury, masy, oddziaływania, ...

# Zależność energii kinetycznej of temperatury

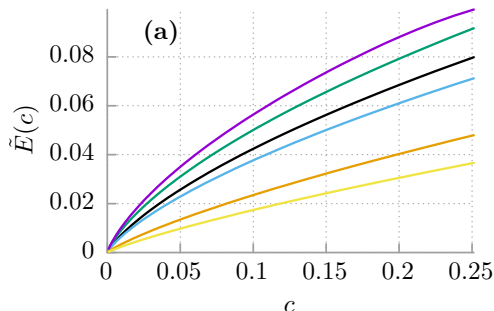


$\tilde{\mu}_0$  : wielkość oddziaływania układ kwantowy - otoczenie

czarna linia prosta - układ klasyczny



# T = 0: Fluktuacje kwantowej próżni



$c$  : wielkość oddziaływania układ kwantowy - otoczenie

$$E \sim c \ln(1/c) \quad c \rightarrow 0 \text{ [ przesunięcie Lamba } c^5 \ln(1/c) \text{ ]}$$

$$E \sim \sqrt{c} \quad c \rightarrow \infty$$

Publikacje z : P. Białas (doktorant), J. Spiechowicz (Phys. Rev. A, J. Phys. A, Sci. Reports, Entropy)

Dowód ogólnego przypadku: J. Łuczka, J. Stat. Phys. 179, 839 (2020):  
*Quantum counterpart of classical equipartition of energy*