mgr Judyta Bąk
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Katowice, 23 września 2020 r.

Streszczenie rozprawy doktorskiej

O pewnych własnościach baz oraz π-baz przestrzeni topologicznych

Niniejsza rozprawa skupia się na dwóch własnościach rozważanych dla baz oraz π-baz przestrzeni topologicznych. Pierwsza z omawianych własności, wprowadzona przez R. Freese'a i J. B. Nation'a w [7], pierwotnie rozważana była dla krat. Druga własność rozważana przez W. Fleissner'a i L. Yengulalp w [6] związana jest z teorią dziedziny wprowadzoną przez D. Scott'a w [9]. Wyniki dotyczące własności Freese–Nation przedstawione zostały w rozdziałach 2–5. Opublikowane zostały one w pracach [1], [4] oraz [3]. Wyniki dotyczące przestrzeni reprezentowanych przez dziedzinę zebrane zostały w rozdziale szóstym i opublikowane w [2]. W rozdziale pierwszym przypominamy pojęcia z zakresu topologii i teorii mnogości, których potrzebujemy w kolejnych rozdziałach.

Ze względów historycznych rozdział drugi rozpoczynamy od wprowadzenia własności dla algebr Boole'a. W rozdziale tym wprowadzone zostają trzy własności:

- własność Freese–Nation,
- separatywna własność Freese–Nation,
- interpolacyjna własność Freese–Nation.

W zakresie algebr Boole'a są one równoważne. Następnie wprowadzamy te trzy własności dla przestrzeni topologicznych. W kolejnym paragrafie wskazujemy pewne klasy przestrzeni topologicznych z własnością Freese–Nation. Pierwszą z nich jest klasa przestrzeni metrycznych, drugą zaś klasa przestrzeni z punktowo miałkim ciągiem pokryć punktowo skończonych. Z wyników zaprezentowanych w tym rozdziale wynika, że własność Freese–Nation oraz separatywna własność Freese–Nation nie są równoważne w klasie przestrzeni metrycznych.

Rozdział trzeci skupia się na przestrzeniach, które można przedstawić jako granicę systemu odwrotnego spełniającego pewne warunki. Pierwszy z paragrafów dotyczy przestrzeni otwarcie generowanych, które wprowadzone zostały przez E. V. Shchepin'a w pracy [10]. Pokazujemy, że w klasie przestrzeni zwartych Hausdorffa zerowymiarowych seperatywna własność Freese–Nation dla rodziny wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych charakteryzuje przestrzenie otwarcie generowane. Pokazujemy, że przestrzenie zwarte Hausdorffa mające seperatywną własność Freese–Nation dla pewnej bazy złożonej ze zbiorów funkcyjnie otwartych są przestrzeniami otwarcie generowanymi. W drugim paragrafie wykazujemy, że przestrzenie zwarte Hausdorffa mające π-seperatywną własność Freese–Nation dla pewnej π-bazy złożonej ze zbiorów funkcyjnie otwartych są przestrzeniami szkieletowo generowanymi. W ostatnim z paragrafów do dowodów twierdzeń z dwóch poprzednich paragrafów dotyczących przestrzeni otwarcie generowanych i szkieletowo generowanych wykorzystujemy grę otwarto-otwartą, wprowadzoną w [5].

W rozdziale czwartym dowodzimy, że rodzina wszystkich podzbiorów regularnie otwartych przestrzeni nieskończonej regularnej oraz topologia przestrzeni nieskończonej regularnej nie mają seperatywnej własności Freese–Nation oraz własności Freese–Nation. Oznacza to, że jeśli przestrzeń topologiczna ma bazę z własnością Freese–Nation, to rozszerzenie tej bazy nie musi mieć własności Freese–Nation.

Wyniki przedstawione w rozdziale piątym dotyczą przestrzeni koabsolutnych. W pierwszym z paragrafów pokazujemy, że przestrzeń koabsolutna do przestrzeni z π-separatywną własnością Freese–Nation ma π-separatywną własność Freese–Nation. Przestrzenie szkieletowo Dugundji'ego są analogiczne do przestrzeni Dugundji'ego, wprowadzonych przez A. Pełczyńskiego w [8]. W drugim paragrafie dowodzimy, że każda przestrzeń szkieletowo Dugundji'ego ma π-separatywną własność Freese–Nation.

Główne wyniki rozdziału szóstego związane są z grą Banacha–Mazura oraz grą Choquet. Wykazujemy, że przeliczalne π-reprezentowanie przez dziedzinę przestrzeni topologicznej jest równoważne istnieniu strategii wygrywającej dla gracza II w grze Banacha–Mazura oraz przeliczalne reprezentowanie przez dziedzinę przestrzeni topologicznej jest równoważne istnieniu strategii wygrywającej dla gracza II w grze Choquet.

Literatura

[1] J. Bąk, A. Kucharski, *Topological spaces with the Freese–Nation property*, Annales Mathematicae Silesianae, 33 (2019), 41–54.

[2] J. Bąk, A. Kucharski, *The Banach–Mazur game and domain theory*, Arch. Math., 114 (2020), 51–59.

[3] J. Bąk, A. Kucharski, *An internal characterization of complete regularity*, Mathematica Slovaca, vol. 70, issue 3, (2020), 775–777.

[4] J. Bąk, A. Kucharski, *Topological spaces with the Freese–Nation property II*, arXiv:1904.08902, praca zaakceptowana w Topology Appl.

[5] P. Daniels, K. Kunen, H. Zhou, *On the open-open game*, Fund. Math., 145 (1994), no. 3, 205–220.

[6] W. Fleissner, L. Yengulalp, *When $C_p(X)$ is Domain Representable*, Fund. Math., 223 (1) (2013), 65–81.

[7] R. Freese, J. B. Nation, *Projective lattices*, Pacific Journal of Mathematics, 75 (1975), 93–106.

[8] A. Pełczyński, *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Dissert. Math., 58 (1968), 1–89.

[9] D. Scott, *Outline of a mathematical theory of computation*, Technical Monograph PRG-2, November 1970.

[10] E. V. Shchepin, *Topology of limit spaces with uncountable inverse spectra*, Uspekhi Mat. Nauk, 31 (1976), no. 5 (191), 191–226.