

**Recenzja pracy doktorskiej mgr. Pawła Klimasary
zatytułowanej „Stochastic Processes in Ecological
Modelling” wykonanej pod kierunkiem prof. dr hab.
Marty Tyran-Kamińskiej**

1 Opis pracy

Praca mgr. Klimasary dotyczy modelowania zjawisk ekologicznych przy skokowo i losowo zmieniających się warunkach środowiskowych. Egzemplifikacją tej teorii jest współistnienie obszarów trawiastych i zalesionych na sawannach w obecności okresowych pożarów traw. Z punktu widzenia lokalnych społeczności problemem tu jest zapewnienie dostatecznego areału traw podtrzymujących umożliwiających rolnictwo i hodowlę bydła na terenach sawannowych i tym samym przetrwanie populacji. W warunkach naturalnych drzewa, poprzez wytwarzanie obszarów zacienionych, wypierają trawy i, przy braku okresowych pożarów, powodują zanik obszarów trawiastych i załamanie się rolnictwa na tych obszarach. Równowaga pomiędzy obszarami zadrzewionymi i trawiastymi utrzymywana jest dzięki okresowym pożarom traw, które niszczą zarówno trawy jak i młode drzewa ale dzięki temu, że trawy odradzają się szybciej, są bardziej korzystne dla nich. Pożary są wzniecane przez lokalne społeczności, ale istniały od zawsze jako mechanizm samoregulacji sawann. O ile te pierwsze są łatwe do opisanego, występowanie pożarów naturalnych jest wynikiem skomplikowanego splotu czynników, które jest trudno modelować w sposób dokładny. Z tego powodu autor proponuje modelowanie pojawiania się pożarów jako wydarzeń losowych. Mówiąc ściślej, narzędziem matematycznym wykorzystywanym do opisu i analizy modeli powyższego typu są tzw. kawałkami deterministyczne procesy Markowa (PDMP), wprowadzone w pracy M. H. A. Davis. *Piecewise-deterministic Markov processes: a general class of nondiffusion stochastic models*. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 46(3):353–388, 1984; autor w istotny sposób korzysta z wyników dotyczących takich procesów zebranych w monografii R. Rudnicki and M. Tyran-

Kamińska. *Piecewise Deterministic Processes in Biological Models*. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer, Cham, 2017. W skrócie, teoria ta dotyczy zjawisk które ewoluują w sposób deterministyczny, opisany klasycznymi układami dynamicznymi pomiędzy skokowymi zmianami zachodzącymi w losowych chwilach czasu; zmiany te mogą dotyczyć tak stanu układu (czyli opisywać zrestartowanie układu z nowymi warunkami początkowymi) jak i struktury układu (czyli np. zmiany współczynników). W opisywanym modelu zmiany biomas(y) są opisywane procesem losowym, charakteryzowanym przez deterministyczny strumień opisujący ewolucję biomas(y) pomiędzy skokami, intensywność skoków i funkcję przejścia opisującą prawdopodobieństwo znalezienia się układu w danej konfiguracji po skoku. Głównym celem pracy jest zbadanie długoczasowego zachowania się gęstości, danych za pomocą półgrup stochastycznych, indukowanych przez skonstruowany proces, a będącymi rozwiązaniami odpowiednich równań typu Fokkera-Plancka (tutaj równania te są równaniami transportu z zaburzeniem całkowym lub funkcyjnym). W tym celu autor wykorzystuje techniki rozwinięte w pracach R. Rudnickiego i K. Pichór, K. Pichór and R. Rudnicki. *Continuous Markov semigroups and stability of transport equations*. J. Math. Anal. Appl., 249:668–685, 2000, K. Pichór and R. Rudnicki. *Asymptotic decomposition of substochastic operators and semigroups*. J. Math. Anal. Appl., 436(1):305–321, 2016.

Przedstawiona rozprawa zaczyna się od streszczeń w języku angielskim, po czym następuje Spis Treści, Autoreferat w języku polskim i jego tłumaczenie na język angielski, występującego pod tytułem Extended Abstract. Ta część pracy kończy się bibliografią. Druga część pracy zawiera kopie czterech prac autora, jednej napisanej samodzielnie, dwóch wraz z promotorką i jednej wspólnie z promotorką, A. Tomskim i M. Mackayem. Dwie prace zostały opublikowane w lokalnym czasopiśmie *Mathematica Applicanda* (choć moim zdaniem autor(autorzy) mogli się pokusić o wysłanie ich do czasopism o wyższej randze), zaś dwie w czasopismach należących do światowej czołówki w matematyce stosowanej.

Autoreferat zaczyna się krótkim omówieniem aktualnego stanu wiedzy o procesach zachodzących na sawannach i ich modelowaniu, po czym autor opisuje podstawy teorii kawałkami deterministycznych procesów Markowa.

Następnie przechodzi do opisanie zawartości wspomnianych czterech prac, które dotyczą coraz bardziej skomplikowanych wersji modelu współoddziaływania traw i drzew na sawannach. W pierwszej pracy stosunek obszarów trawiastych i zalesionych jest opisany równaniem logistycznym, losowe są czasy w których występują pożary i związane z nimi zmiany stosunku obszarów zalesionych do trawiastych. W opisie na stronie 3 jest chyba błędem napisanie, że $\mathcal{P}(x, X \setminus \{x\}) = 0$. Ponadto niejasny jest opis poniżej (2.1) – na przykład, co to jest X^0 ? Wydaje mi się, że czegoś brakuje we wzorze na $\mathcal{P}(v, B)$ – czy mamy tę samą gęstość h dla każdego θ_n ? Dalej, tutaj (i w dalszych częściach) autor wprowadza przestrzeń stanów jako $X = (0, 1]$ co, jak sądzę, jest spowodowane tym, że stan 0 jest trywialny. Jednak później X jest wyposażona w miarę Lebesgue’a, co powoduje, że wyróżnienie jednego punktu jest nieistotne (w późniejszych pracach autor omawia miary stacjonarne skoncentrowane na brzegu obszaru stanów, ale są to miary Diraca, które nie wchodzą w teorię L_1 , rozwijaną przez autora.). Dobrze by było to wyjaśnić lepiej, aby ułatwić czytanie komuś, kto nie jest specjalistą w tej dziedzinie.

Ciekawy dla mnie jest wzór na generatora A , który wygląda tak, jak generator równania wzrostu-fragmentacji (ze wzrostem ograniczonym do $(0, 1)$ i jednorodnym jądrem fragmentacji). Co ciekawe, warunki (3.2) i (3.3) zawierają całkę, która pojawiła się w analizie stabilności równania wzrostu-fragmentacji w poprzedniej pracy doktorskiej wykonanej pod opieką prof. Tyran-Kamińskiej. Może warto by spróbować podać interpretację (3.2) i (3.3) i zastanowić się nad związkami tych dwóch modeli.

Druga omawiana w Autoreferacie praca uogólnia powyższe wyniki na przypadek, kiedy areały lesiste i trawiaste są opisane dwiema funkcjami, które spełniają układ dwóch równań różniczkowych. W tej pracy czynnikiem losowym są momentem skoku natomiast, w przeciwieństwie do pracy wcześniejszej, zmiany areałów są deterministyczne. Powoduje to, że w generatorze półgrupy stochastycznej indukowanej przez proces pozostaje część transportowa, zaś operator całkowy zamienia się na operator podstawienia.

Praca trzecia zawiera daleko idące uogólnienia powyższych modeli polegających głównie na uwzględnieniu istnienia pór roku. Mamy tu różne układy dynamiczne w każdej porze roku, a więc i skoki określone przez nie, ale też

i każdej porze roku może nastąpić zmiana stanu populacji w wybranym losowo momencie. Dynamika deterministyczna jest tutaj uzupełniona przez wprowadzenie populacji roślinożerców. Główną trudnością z którą zmierzali się autorzy tej pracy jest pojawienie się okresowości zmian, co automatycznie wyklucza istnienie rozwiązań stacjonarnych i stabilności asymptotycznej. Powoduje to, że zachowanie długoczasowe odpowiedniej półgrupy stochastycznej jest tym razem opisane za pomocą granicy Cesàro, czyli miary będącej granicą średnich.

Ostatnia praca stanowi uogólnienie powyższych wyników na przypadek, gdy zmiany struktury układów zachodzą nie okresowo, jak powyżej, ale też w chwilach losowych. Opis konstrukcji procesu na stronie 16 zawiera pewne luki. Na przykład, nie wiadomo co to jest ρ w przestrzeni mierzalnej (E, ρ) , albo $U(t)$ w definicji procesu $\xi(t)$. Wydaje mi się też, że powinno pisać układ semi-dynamiczny, a nie semi-układ dynamiczny.

W tej pracy badana jest asymptotyka średniej tego procesu, która to spełnia układ równań składający się z równań zawierających wszystkie możliwe generatory sprzężone za pomocą macierzą intensywności.

W ogólności, badanie długoczasowego zachowania kawałkami deterministycznych procesów Markowa sprowadza się do analizy w sumie deterministycznych układów równań transportu zaburzonych pewnymi na ogół nielokalnymi operatorami typu kinetycznego. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań opiera się głównie na wynikach zawartych w monografii napisanej przez promotorkę i R. Rudnickiego.

2 Podsumowanie

Nie jest jasna do końca rola recenzenta rozprawy doktorskiej przedstawionej w postaci zbioru opublikowanych już prac z przewodnikiem po nich. Nie sądzę, że jest moim zadaniem ponowna recenzja tych prac, zwłaszcza że dwa ostatnie czasopisma są znane z wysokiego standardu recenzji i publikują wyłącznie starannie wybrane prace.

Oceniając całokształt przedstawionych wyników mogę stwierdzić, że ilustrują one spójny i logiczny rozwój naukowy kandydata, od stosunkowo prostego zastosowania wyników promotorki i całej grupy działającej na Uni-

wersytecie Śląskim, do sformułowania nietrywialnych wyników dotyczących ergodyczności w średniej procesów Markowa. Wyniki te mają też znaczenie do badania asymptotyki długoczasowej równań kinetycznych. Na uznanie też zasługuje osadzenie wyników teoretycznych w konkretnym stosowanym kontekście obejmującym modelowanie pożarów na sawannach. Poziom publikacji napisanych na podstawie pracy doktorskiej wykracza poza przeciętną. Nie mam wątpliwości, że przedstawione wyniki zasługują, aby nadać mgr. Klimasarze stopień doktora nauk matematycznych.

Ponieważ nie jestem probabilistą, trudno mi w pełni ocenić wszystkie techniczne aspekty wyników opisanych przez mgr. Klimasare, ale jestem skłonny poprzeć wniosek o wyróżnienie doktoratu, jeśli taki zostanie złożony przez specjalistów znających się na tej tematyce lepiej ode mnie.

