

dr hab. Grzegorz Bobiński  
profesor nadzwyczajny  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, 25 sierpnia 2016 roku

Recenzja rozprawy doktorskiej  
mgr Marty Nowakowskiej

### **Rozszerzenia i ideały pierścieni łącznych**

dla Rady Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego

Struktury algebraiczne, takie jak grupy i pierścienie, pojawiają się w naturalny sposób w bardzo różnorodnych działach matematyki. Nic dziwnego więc, że są przyciągają one również uwagę jako samodzielne obiekty badań. W szczególności interesujące jest badanie wzajemnych relacji pomiędzy różnymi obiektami tego samego typu, co w przypadku pierścieni prowadzi do badania podpierścieni i rozszerzeń pierścieni. W omawianej pracy Autorka koncentruje się na ideałach i rozszerzeniach ideałowych, tj. takich rozszerzeniach, w których rozszerzany pierścień jest ideałem (jedno- lub dwustronnym) w swoim rozszerzeniu. Naturalnie pojawiającym się w tej sytuacji pytaniem jest kwestia przechodniości relacji bycia ideałem, która w rozważanej pracy przyjmuje dwie następujące wersje:

- dla jakich pierścieni  $R$ , jeśli  $I$  jest ideałem (lewo-/pravo-/dwustronnym) pierścienia  $R$ , a  $J$  jest ideałem (lewo-/pravo-/dwustronnym) ideału  $I$  (traktowanego jako pierścień), to  $J$  jest ideałem (lewo-/pravo-/dwustronnym) pierścienia  $R$ ?
- dla jakich pierścieni  $R$ , jeśli  $I$  jest ideałem (lewo-/pravo-/dwustronnym) pierścienia  $R$ , a  $R$  jest ideałem (lewo-/pravo-/dwustronnym) pierścienia  $S$ , to  $I$  jest ideałem (lewo-/pravo-/dwustronnym) pierścienia  $S$ ?

Należy zwrócić uwagę na fakt, że w istocie każde z powyższych pytań ma 27 wersji, gdyż każda kombinacja przedrostków „lewo”, „prawo” i „dwo” jest możliwa. Zagadnienia te były badane m.in. przez Andruszkiewicza, Filipowicz, Kępczyka, Pryszczepko, Puczyłowski, Sandsa, Erlich, Veldsmana. W szczególności Veldsmana w sposób systematyczny sformułował pierwszy z powyższych problemów, stąd w pracy klasy pierścieni otrzymywane przy jego badaniu nazywane są klasami Veldsmana.

W swojej rozprawie doktorskiej mgr Marta Nowakowska bada trzy następujące zagadnienia:

- (1) Istnienie (i jednoznaczność) uniwersalnego istotnego rozszerzenia lewostronnego danego pierścienia  $R$ , gdzie rozszerzenie  $S$  pierścienia  $R$  jest istotne (lewostronne), jeśli  $R \cap I \neq 0$  dla każdego niezerowego ideału  $I$  pierścienia  $S$  ( $R$  jest ideałem lewostronnym pierścienia  $S$ , odpowiednio), natomiast uniwersalność rozszerzenia  $S$  oznacza, że każde inne takie rozszerzenia zanurza się w  $S$ .
- (2) Charakteryzacja i struktura pierścieni  $R$ , które nie posiadają nietrywialnych ideałów (lewo-/prawo-/dwustronnych)  $I$  takich, że  $I$  jest ideałem (lewo-/prawo-/dwustronnym) pierścienia  $S$  dla każdego rozszerzenia  $S$  pierścienia  $R$ , w których  $R$  jest ideałem (lewo-/prawo-/dwustronnym).
- (3) Charakteryzacja i struktura pierścieni należących do klas Veldsmana.

Rozwiązując problem (1), Autorka znajduje warunek konieczny i wystarczających na istnienie uniwersalnego istotnego rozszerzenia lewostronnego danego pierścienia. W przypadku istnienia takiego rozszerzenia dowodzona jest również jego jednoznaczność oraz przedstawiona elegancka konstrukcja. Warto dodać, że problem ten jest związany z postawionym wcześniej przez Beidara pytaniem o istnienie uniwersalnego istotnego rozszerzenia (dwustronnego). Istnienie tego obiektu zostało udowodnione przez Flenigana, natomiast w rozprawie można znaleźć nowy elementarny dowód istnienia takiego rozszerzenia.

Druga grupa wyników rozprawy dotyczy problemu (2). Uzyskane w tej części pracy wyniki dają charakteryzację badanych pierścieni oraz pełny opis ich struktury. Są one rozszerzeniem wyników uzyskanych wcześniej przez Filipowicz i Kępczyka. Warto dodać, że ważną rolę w dowodach odgrywa udowodnione wcześniej istnienie uniwersalnego istotnego rozszerzenia lewostronnego.

Ostatnia, najobszerniejsza grupa wyników dotyczy klas Veldsmana. Wyniki te obejmują charakteryzację pierścieni należących do tych klas. Uzyskane

są również częściowe wyniki dotyczące struktury wybranych (np. zredukowanych) pierścieni z tych klas.

Powyższa struktura wyników zawartych w rozprawie znajduje odbicie w strukturze samej rozprawy. Jest ona podzielona na cztery rozdziały, z których pierwszy zawiera informacje wstępne, a pozostałe trzy wyniki dotyczące przedstawionych powyżej zagadnień, odpowiednio. Praca jest przejrzysta i starannie napisana. Praca ma 109 stron. Przy tej objętości pracy nie było możliwe, aby Autorka uniknęła literówek czy drobnych błędów. Pojawiają się też niestety nieco bardziej istotne usterki, jak nie do końca precyzyjne sformułowania dowodzonych faktów (np. Twierdzenie 2.2.12 lub Lemat 3.2.10) oraz przeskok lub niepoprawne argumenty w dowodach (np. Lemat 2.1.1 lub Stwierdzenie 4.4.13). W większości sytuacji Czytelnik nie powinien mieć problemów z korektą wspomnianych błędów, w moim przypadku jedynie w jednej sytuacji konieczna była konsultacja z Autorką, aby poznać brakujące argumenty. Pewnym zgrzytem jest też moim zdaniem częste stosowanie „angielskiego” szyku wyrazów, jak np. w sformułowaniu „addytywna grupa pierścienia”. Mimo powyższych krytycznych uwag całościowa ocena pracy od strony formalnej jest dobra. Również wysoko oceniam uzyskane w pracy wyniki.

Podsumowując chciałbym stwierdzić, że w mojej ocenie przedstawiona rozprawa spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr Marty Nowakowskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

*Grzegorz Bobiński*  
Grzegorz Bobiński

