

Recenzja rozprawy doktorskiej Michała Rózańskiego
**Uogólnienia nierówności Hadamarda oraz twierdzeń
Frobeniusa i Dieudonné**

W swojej rozprawie doktorskiej autor zajmuje się własnościami macierzy zespolonych. Rozprawa składa się z trzech rozdziałów, o nieco różnej tematyce. W rozdziale pierwszym omówione zostały klasyczne nierówności. Rozdział ten został podzielony na trzy podrozdziały. W pierwszym z nich została najpierw przypomniana (wraz z dowodem) nierówność Hadamarda

$$\Gamma(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|,$$

pomiędzy wyznacznikiem macierzy Gramma a iloczynem długości wektorów. Następnie (również z dowodem) nierówność Fischera

$$\Gamma(x_1, \dots, x_n) \leq \Gamma(x_1, \dots, x_k) \Gamma(x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Po tym wstępie została udowodniona nierówność

$$\Gamma(x_1, \dots, x_n) + \prod_{i=1}^n |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|,$$

tak zwana permutacyjna nierówność Hadamarda.

W dalszej części wynik ten został przetłumaczony na języki macierzy hermitowskich oraz F -macierzy.

Jedynym oryginalnym wynikiem tej części jest permutacyjna nierówność Hadamarda. Problem w tym, że jak autor sam przyznaje, wynik ten był już kilka lat wcześniej udowodniony przez X. Zhang i S. Yang. Uznaje jednak, że jego wynik, opublikowany już w dwóch pracach (głównie z promotorem) został uzyskany niezależnie (gdyż tamte prace chińskich matematyków były trudne do znalezienia), oraz posiada ważny naddatek jakim jest opisanie wszystkich przypadków, gdy zachodzi równość.

Co do drugiej uwagi to niezbyt się z nią zgadzam, gdyż zwykle w takiego rodzaju nierównościach znalezienie warunków na równość jest banalne. Tak jest i tutaj. Zaś co do oświadczenia o niezależnie uzyskanych wynikach to z tym mógłbym się zgodzić. Te wcześniejsze prace były opublikowane pod tytułami nie od razu kojarzącymi się z tym tematem. W takim przypadku zdarza się, że powstają prace o tym samym wywodzące się z innych działów matematyki, których badacze nic o sobie nie wiedzą dowodzą tych samych twierdzeń pod zupełnie innymi nazwami. I tu nie można mieć do doktoranta (jako jeszcze niedoświadczonego naukowca) o to pretensji, że nie znał takich powiązań. Jeśli już należy mieć ją do promotora.

Drugi podrozdział poświęcony jest nierównością na ślad macierzy wzorowanym na nierówności von Neumanna.

Podaje się nowe dowody (wzorowane na metodzie R. Grigorieff) znanych już twierdzeń

$$\sup_{U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})} \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{j=1}^k U_j A_j \right) \right| = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \sigma_i(A_j),$$

gdzie tym razem σ nie oznacza permutacji a wartość osobliwą.

$$\sup_{U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})} \operatorname{tr}(UAU^*B) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)\lambda_i(B)$$

oraz

$$\inf_{U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})} \operatorname{tr}(UAU^*B) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)\lambda_{n-i+1}(B)$$

Zastosowanie wspomnianej metody dają łatwiejsze i ciekawe dowody.

W trzecim podrozdziale przytoczone zostało (wraz z dowodem) twierdzenie Kreina (jeszcze inne wzmocnienie twierdzenia Hadamarda).

Podsumowując rozdział pierwszy łatwo dojść do konkluzji, że jedynym oryginalnym wynikiem jest permutacyjna nierówność Hadamarda (co do oryginalności której też można mieć pewne zastrzeżenia). Niejakim wkładem też może być uznane ukazanie w jaki sposób metoda R. Grigorieff może posłużyć do dowodzenia twierdzeń.

Niestety rozdział ten został nadnaturalnie wydłużony przez dodanie dowodów klasycznych twierdzeń i lematów (z czego mam poważne wątpliwości co do poprawności dowodu Twierdzenia 1). Dodatkowo w podrozdziale trzecim nie ma żadnego uzasadnienia, dlaczego się tu znalazł.

W drugim rozdziale macierze traktowane są jako przekształcenia liniowe. Na początek rozważane są uogólnienia twierdzenia Frobeniusa o postaci takich przekształceń zachowujących wyznacznik (lub jakiś zbiór). Można je wyrazić w postaci:

Przy pewnych (różnych) założeniach przekształcenie ma postać

$$L(X) = PXQ \quad \text{albo} \quad L(X) = PX^TQ.$$

Ta część zaopatrzona jest w kilka tego typu wyników z bardzo ładnymi dowodami. Niestety dowody mają kilka błędów, ale wynikają one bardziej z nieumiejętności pisania, są łatwe do naprawienia i nie mają wpływu na wartość merytoryczną.

Rozważana jest również ilość takich przekształceń, które zachowują wyznacznik. Pokazuje się tu, że jeśli R jest pierścieniem skończonym, to jest ich $|SL_n(R)|^2$. W przypadku pierścieni reszt modulo n daje to podobne wyniki jak wyżej (wcześniej były głównie dla ciał).

Ogólnie jest to najlepsza część doktoratu. wyniki są oryginalne i ciekawe. Dowody czasami z drobnymi mankamentami, ale też poprawne.

Pozostaje zatem jeszcze dodatek, czyli rozdział trzeci. Pierwsza część nie powinna się tu znaleźć. Autor przytacza tu znany i prosty fakt o generowaniu grupy $SL_2(\mathbb{Z}_n)$. Przytacza tu skomplikowany dowód, który normalnie zajmuje dwie linijki. Jako wniosek podaje oczywisty fakt, który używa się w standardowym dowodzie.

W drugiej części jest już oryginalny wynik, który dotyczy postaci tych przekształceń (niekoniecznie liniowych), które mają postać

$$(T(X))_{ij} = f_{ij}((X)_{ij}),$$

i zachowują rząd lub wyznacznik. Podane są odpowiednie warunki na funkcje f_{ij} . Dowody są ciekawe, choć techniczne.

To kończy opis merytorycznej zawartości rozprawy. Teraz trochę o części redakcyjnej. Niestety praca jest bardzo źle napisana. Co dziwi, biorą pod uwagę, że autor ma aż dwoje promotorów. Popełnione jest, jeśli nie wszystkie to wiele, 'grzechów' redakcyjnych. Poniżej wymienię część z nich.

Po pierwsze praca przypomina bardziej pracę przeglądową, zwłaszcza w pierwszym rozdziale. Według mnie nie tego się oczekuje od rozprawy doktorskiej. Wydaje się, że autor stara się podać dowody wszystkich faktów pojawiających się w pracy. Można tu znaleźć dowody klasycznych twierdzeń (niestety nieraz chyba z błędami). I w tym brakuje jednak konsekwencji, bo w nielicznych miejscach są odwołania do literatury. Stwarza to wrażenie, że te części dowodu są dla autora za trudne. Przydałaby się większa konsekwencja. Według mnie podawanie dowodów znanych twierdzeń (jeśli te dowody nic nie wnoszą) jest niewskazane. Podrozdział trzeci rozdziału pierwszego oraz podrozdział pierwszy rozdziału trzeciego nie wnoszą nic wartościowego do pracy i należałoby je usunąć.

Autor nie ma wycucia jaka część dowodu powinna być bardziej rozwinięta, a jaką może zostawić czytelnikowi jako oczywistą. Z jednej strony pisze, że widać od razu jakąś nieoczywistą rzecz, a z drugiej można spotkać na przykład wyjaśnienie: dla $B = I$ mamy

$$(BAB^{-1})_{kk} = (IAI^{-1})_{kk} = (IAI)_{kk} = (A)_{kk}.$$

Nadużywa się tu języka potocznego zapominając o kwantyfikatorach. W wielu miejscach prowadzić to może (prowadzi) do nieporozumień, czy błędów. Często nie jest jasne jaki kwantyfikator autor ma na myśli (bądź kolejność kwantyfikatorów).

Stosuje się również obiekty lub skróty, które nie zostały zdefiniowane. Zwykle czytelnik jest w stanie po chwili domyślić się o co chodzi z dalszej części tekstu, ale jest to bardzo męczące. Zdarzają się dwa różne (lub więcej) oznaczenia (oba niezdefiniowane) na tę samą rzecz, jak również to samo oznaczenie na różne rzeczy. Czasami również zmienia się oznaczenia na przeciwne ('żeby utrudnić czytelnikowi odbiór').

Dowodzi się twierdzenia (bez podania rozsądnej przyczyny), przy pomocy lematów, które pojawiają się dalej w tekście. Czasami jest to wcześniej zapowiedziane, czasami nie ma żadnej wzmianki. To zmusza czytelnika do większego wysiłku, by skakał po całej pracy w poszukiwaniu czegoś, czego jeszcze nie przeczytał.

Nie definiuje się wielu pojęć użytych w pracy (pewnie autor w większości przypadków uważa je za ogólne znane, ale nie wszystkie chyba dobrze rozumie), a z drugiej strony definiuje się takie, które ogólnie znane rzeczywiście są.

W tekście można znaleźć wiele literówek, czy błędów gramatycznych. Przy tym zaawansowaniu narzędzi korekcyjnych jest to co najmniej dziwne i mówi sporo o zaangażowaniu autora (jak i promotorów) w stronę redakcyjną.

Poniżej zamieszczam bardziej szczegółowe uwagi. Prawdopodobnie nie zauważyłem wszystkiego. Większość literówek i błędy gramatyczne pomijam. Pomijam również wszystkie miejsca, które łatwo zidentyfikować z tego co napisałem powyżej.

Są dwa różne oznaczenia na ciało, w zależności od rozdziału. Nie jest to problem, ale jaki jest powód by tak było?

s.9 dowód b) 'to istnieją ...' - jaka jest tu kolejność kwantyfikatorów. Dla jednej oczywiście jest spełnione, ale do dowodu potrzebna jest przeciwna, całkiem nieoczywista (o ile prawdziwa).

s.9 przed dowodem c) 'Stąd otrzymujemy ...' - ta część niejasna i wymaga bardziej szczegółowego wyjaśnienia.

s.10 końcówka 'Zatem z Twierdzenia Pitagorasa' - Tutaj raczej bezpośrednio z ortogonalności wektorów. Do dowodu Twierdzenia Pitagorasa również trzeba tego użyć, więc tak jest uczciwiej.

s.12 końcówka - nie ma definicji macierzy całkowicie nieujemnych.

s.13 środek - nie ma definicji CBS. Można się domyślić dalej, że chodzi o nierówność znaną bardziej jako nierówność Couch'ego-Schwartz lub nierówność Schwartz. Pana oznaczenie jest jakieś lokalne i powinno być zdefiniowane.

s.14 góra - nie zawsze jest prawdziwa równość $\text{supp}(\sigma^k) = \text{supp}(\sigma)$. Dalej jest dobrze, ale wynika to z innej własności.

s.14 pod koniec 'Kwentyfikator szczegółowy dotyczący transpozycji w lemacie 2 nie może być zastąpiony przez kwentyfikator ogólny, co wynika z poniższego przykładu.' - Ta uwaga mało wnosi. Inaczej oznaczało by równość dla każdej transpozycji.

s.22 nie ma definicji gotyckiego R. Rozumiem, że chodzi o część rzeczywistą liczby zespolonej zwykle oznaczaną Re .

s.23 środek - wcześniej (i później) przez σ oznacza się permutację. Teraz wartość osobliwą. Bardzo mylące dla czytelnika.

s.23 środek - w definicjach α_i, β_i jest coś nie tak. Pewnie coś z numeracją indeksów. Tak nie działa, a przy przeciwnej chyba tak. Może po przeredagowaniu.

s.39 - niezdefiniowane oznaczenie na moc zbioru. Tu użyta kreska u góry w innym miejscu dwie kreski po bokach.

s.42 'Załóżmy nie wprost, że przekształcenie L jest osobliwe' - tu dziwnie zredagowane. Gdzie jest napisane, że L jest nieosobliwe, że zakładamy niewprost coś przeciwnego. Najpierw trzeba wyjaśnić, że w tych założeniach tak jest.

s.43 - nie ma definicji porządku. Dla porządku nie można napisać zwykle min po zbiorze. Pewnie chodziło panu tutaj o porządek liniowy.

s.44 w środku 'Załóżmy, że n-ty wiersz'. - Tu dla spokoju i lepszego odbioru czytelnika przydało by się napisać (bzo). Inaczej na chwilę można pomyśleć, że n-ty wiersz jest jakiś wyjątkowy.

s.45 początek - 'Zauważmy, że ...'. Przydało by się bardziej szczegółowe wyjaśnienie.

s.47 środek - 'Udowodnimy słabszą wersję lematu.'. Wydaje się, że jak osłabimy założenia to wynik będzie silniejszy.

s.48 lemat 6. - To jest nieprawdziwe. Prawdopodobnie zły kwentyfikator.

s.52 koniec ' $(G)_{ii} = (GE_{ij})_{ii} = (E_{ij}G)_{ii} = (G)_{jj}$.' - Nie prawdziwe. Prawdopodobnie w środku powinno być ij .

s.53 środek - jak wyżej.

s.55 początek 'pierścieniem modulo' - to prawdopodobnie oznacza skrót od pierścień reszt modulo n, jak dalej jest poprawnie użyte.

s.69 Uwaga 8 - jaki ona ma cel? Przecież mamy $L(M_n(\mathbb{F})) \subseteq S$, więc to jest oczywiste.

s.70 początek - jaki jest kwentyfikator na $B \in GL_n(\mathbb{F})$?

s.79 Definicja 14 - jaki kwantyfikator? Czy przestrzeń jest tylko jedna, czy każdą tak nazywamy?

s.85 koniec - niema definicji $f_{i,j}$, czy tu może brakuje kwantyfikatora?

s.87 początek - co to jest B_i nie było definicji.

s.87 środek - wcześniej permutacje były oznaczane małymi literami a Σ oznaczało zbiór macierzy osobliwych?

s.88 środek - dla $s = j$, B_s z tego lematu jest tym samym co A z poprzedniego. Dlaczego tak zmiana nazewnictwa z A na B ?

Konkluzja:

Uważam, że rozprawa doktorska broni się pod względem merytorycznym, głównie za sprawą rozdziału drugiego. Autor ma odpowiednią wiedzę w opisywanym temacie i potrafi stosować ją do rozwiązywania powstałych tam problemów. Niestety dużym problemem jest strona redakcyjna, która jest słabą stroną autora pracy. Jest to dość istotna część pracy naukowca i powinna być uwzględniona przy pisaniu rozprawy doktorskiej.

Z tej to przyczyny nie mogę z pełnym przekonaniem uznać, iż w obecnej formie przedstawiona rozprawa spełnia warunki stawiane rozprawą doktorskim przez art. 13 Ustawy. Dlatego też wnoszę, aby przed dopuszczeniem kandydata do dalszego toku przewodu doktorskiego praca została przerezagowana zgodnie z powyższymi uwagami.

Mariusz Grech