Prof. dr hab. Ryszard Rudnicki
Instytut Matematyczny PAN
Oddział w Katowicach

Katowice, 6.5.2023 r.

Recenzja pracy doktorskiej mgr. Pawła Klimasary
pt. *Stochastic Processes in Ecological Modelling*

I Struktura i tematyka rozprawy

Na pracę doktorską mgr. Pawła Klimasary składają się cztery publikacje i obszerny autoreferat. Pierwsze dwie prace zostały opublikowane w *Mathematyka Applicanda*, przy czym jedna jest samodzielna, a druga opublikowana wraz z promotorką rozprawy prof. Martą Tyran-Kamińską. Promotorka jest również współautorką trzeciej publikacji w *SIAM J. Appl. Math.*, zaś współautorami czwartego artykułu opublikowanego w *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* są jeszcze prof. Michael C. Mackey z Mc.Gill University w Montrealu oraz dr Andrzej Tomski.

Trzy pierwsze publikacje dotyczą bezpośrednio głównej tematyki rozprawy, a więc matematycznego modelowania ekosystemu sawanny, zaś czwarty poświęcony jest równaniom ewolucyjnym z losowym przełączaniem. Równania te są podstawowym narzędziem używanym w modelowaniu zjawisk biologicznych i w ostatniej pracy przedstawione są również przykłady zastosowań, w tym oprócz już klasycznych z modelowania dynamiki populacyjnej i ekspresji genów, pojawiają się również modele wykorzystujące przełączanie między równaniami cząstkowymi.

Modelowanie złożonych ekosystemów, takich jak sawanna, jest zagadnieniem trudnym ponieważ wymaga zrozumienia delikatnych powiązań między różnymi obiektami biologicznymi i fizycznymi i ich matematycznego opisania, a jednocześnie umiejętności redukcji modelu do podstawowych mechanizmów, tak aby matematyczna analiza modelu dawała istotne informacje dotyczące całego ekosystemu. Z drugiej strony modelowanie różnorodnych systemów biologicznych ma już długą tradycję bazującą na modelach konkurencji i drapieżca-ofiara, a więc na modelach opisywanych za pomocą układów równań różniczkowych zwyczajnych oraz równań stochastycznych typu Itô. Jednak modele te nie wystarczają, aby opisać procesy biologiczne, których dynamika zmienia się w sposób skokowy w losowych momentach czasu. Taki charakter mają procesy opisujące katastrofy ekologiczne, na przykład wybuchy pożarów na sawannie. W swoich pracach doktorant stara się budować modele ekosystemu sawanny z uwzględnieniem mechanizmów losowych o gwałtownej naturze. W tym celu używa narzędzi matematycznych – procesów kawałkami deterministycznych, to znaczy takich procesów, które generalnie mają naturę deterministyczną, a więc ich przebiegi są opisywane za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych, ale w losowych momentach następuje albo zmiana dynamiki, albo skok wartości procesu.

II Opis modeli, używanych narzędzi matematycznych i uzyskanych wyników

W kolejnych pracach kandydata pojawiają się coraz bardziej złożone modele matematyczne opisujące koegzystencje różnych elementów ekosystemu sawanny. Roślinność sawanny dzieli na dwie grupy: roślin trawiastych i drzewiastych, których biomasę oznaczamy odpowiednio przez g i w.

Model przedstawiony w pierwszej pracy jest stosunkowo prosty. Biomasa drzew wzrasta według równania logistycznego: $w' = \alpha w(1-w)$, zaś trawa wypełnia pozostały obszar, a więc $g = 1 - w$. Pożary występują w losowych momentach (t_n) i biomasa drzew po pożarze w chwili t_n wynosi $w(t_n) = (1-\theta_n)w(t_n^-)$, gdzie (θ_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych przyjmujących wartości w przedziale $(0, 1)$ o ustalonej gęstości h. Prawdopodobieństwo pożaru w przedziale czasu $[t, t+\Delta t]$ wynosi $\lambda(w(t))\Delta t + o(\Delta t)$. Jest to typowy jednowymiarowy model katastrofy ekologicznej. Z przedstawionego opisu wnioskujemy, że wielkość biomasy $w(t)$ opisana jest procesem Markowa, a dokładniej procesem Markowa z losowymi skokami wielkości w. Doktorant bada jak zmienia się gęstość $p(t, w)$ rozkładu tego procesu i podaje warunki konieczne na *asymptotyczną stabilność* rozkładów w L^1, a więc kiedy spełniony jest warunek $\lim_{t\to\infty} \int_0^1 |p(t, w) - p_*(w)|\, dw = 0$, gdzie p_* jest gęstością rozkładu stacjonarnego. Główne narzędzie użyte w badaniu to *półgrupy stochastyczne* (inna nazwa, to *półgrupy Markowa*) opisujące ewolucję gęstości rozkładów oraz twierdzenia wiążące własności półgrupy z własnościami operatora skoku.

W drugiej pracy badany jest model, w którym między pożarami wielkości biomasy obu grup roślin spełniają układ równań konkurencji, a zatem model opisany jest za pomocą dwuwymiarowego procesu Markowa ze skokową zmianą wielkości. Główny wynik pracy to twierdzenie o asymptotycznej stabilności gęstości rozkładów. Dowód tego faktu oparty jest na dość zaawansowanych twierdzeniach dotyczących częściowo-całkowych półgrup stochastycznych.

Najbardziej zaawansowany model ekosystemu sawanny pojawia się w trzeciej pracy.

W założeniu model ten ma uwzględnić jeszcze czynnik sezonowy (pora sucha i deszczowa). Wprowadzenie sezonowości za pomocą procesów kawałkami deterministycznych jest dość kłopotliwe, bo wymusza okresową zmianę dynamiki, zaś zwykle skoki w takich procesach odbywają się w losowych momentach czasu. W pracy rozważany jest jeszcze bardziej skomplikowany model, w którym występują dwie grupy roślinożerców wpływające na biomasę roślin drzewiastych i trawiastych. Ostatecznie w modelu występują skoki biomasy roślin oraz sezonowa zmiana dynamiki. Dynamika między skokami procesu opisana jest za pomocą czterowymiarowego układu równań różniczkowych łączącego konkurencję między roślinami oraz wpływ zwierząt na ubytek biomasy. Komplikacje związane z okresowością powodują, że zamiast asymptotycznej stabilności modelu dowodzi się, że proces jest *ergodyczny w sensie Césaro* (w średniej). Dowód tego faktu jest długi, technicznie trudny i opiera się na metodach teorii R-łańcuchów wypracowanej przez S. Meyna i R. L. Tweediego.

W ostatnie pracy badane są półgrupy stochastyczne z losowymi przełączeniami, a więc model opisany jest równaniami

$$u'(t) = A_{i(t)}u(t), \tag{1}$$

gdzie A_i są generatorami półgrup stochastycznych na przestrzeni $L^1(E)$, a $i(t) \in I$ jest numerem półgrupy zmieniającym się losowo zgodne z pewną funkcją przejścia. Na przykład (1) może być równaniem Fokkera-Plancka przy ustalonym i, zaś losowa zmiana i prowadzi do procesu stochastycznego na przestrzeni stanów $L^1(E \times I)$. Procesy te różnią się od wcześniej rozpatrywanych tym, że poprzednio rozkłady procesów były określone na podzbiorach $\mathbb{R}^n$, teraz są miarami na przestrzeni nieskończenie wymiarowej X lub jej podprzestrzeni. Nie należy oczekiwać, że uda się tu powtórzyć twierdzenia o asymptotycznej stabilności gęstości takich miar. Udaje się za to uzyskać twierdzenia o asymptotyce długoczasowej średnich, tzn. funkcji $V(t,x) = \mathbb{E}\,u(t,x)$ oraz średnich korelacji przestrzennych rozwiązań, tzn. funkcji $C(t,x,y) = \mathbb{E}\,u(t,x)u(t,y)$. Dowody tych twierdzeń są dość zaawansowane. Już samo pokazanie, że zagadnienia te można sprowadzić do badania półgrup stochastycznych na przestrzeni $L^1(E \times I)$ i przestrzeni $L^1(E^2 \times I)$ wymaga użycia zaawansowanych metod teorii operatorów.

III Ocena pracy i szczegółowe uwagi

Autoreferat i zawarte publikacje są dość dobrze zredagowane. Kilka uwag krytycznych dotyczących abstraktu podam na końcu tego punktu. Prezentowane prace zawierają nowe wyniki matematyczne, są również interesujące ze względu na rozważane zagadnienia biologiczne. Główną trudnością jaką musiał pokonać doktorant, było przyswojenie zaawansowanej pojęciowo teorii i konieczność stosowania technik z różnych dziedzin matematyki. Rozumowania przedstawione w dowodach wymagają dużej umiejętności w operowaniu abstrakcyjnymi obiektami matematycznymi z teorii procesów stochastycznych, teorii półgrup operatorów i analizy funkcjonalnej. Uważam, że badana tematyka jest nowoczesna, zaś rozprawa jest na dobrym poziomie. Drobną słabością rozprawy jest fakt, że tylko jedna publikacja, ta najmniej zaawansowana, jest samodzielna. Nie mam wątpliwości, że gdyby dwie ostatnie publikacje były samodzielne, to doktorat ten można byłoby uznać za wybitny.

Poniżej przedstawiam kilka uwag krytycznych dotyczących abstraktu.

1. Linia 4^3: uwaga, że $\pi_t(X) \subseteq X$ jest w tym miejscu niepotrzebna, a może wprowadzić czytelnika w błąd.

2. Linia 5^8: definicja *aktywnego brzegu* jest niepoprawna. Punkty aktywnego brzegu są wartościami rozwiązania równanie (2.1) w chwili $t_+(x)$, a więc do aktywnego brzegu należą punkty $x(t_+(x))$, gdy $t_+(x) < \infty$.

3. Opis narzędzi matematycznych używanych w dowodach jest dość skromny. Na przykład nie ma twierdzenia o związku asymptotycznej stabilności dla półgrupy z czasem ciągłym i dla operatora Markowa opisującego trasformacje gęstości w punktach skokowych, zaś w publikacji jest tylko odsyłacz do innej pracy.

IV Podsumowanie

Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska Pawła Klimasary spełnia wszystkie **wymogi ustawowe**, m. in. stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego w rozumieniu Art. 187 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. „Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce". Wnioskuję o dopuszczenie Pawła Klimasary do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Signed by /
Podpisano przez:

Ryszard Jan
Rudnicki

Date / Data:
2023-05-08 09:21

Prof. dr hab. Ryszard Rudnicki