

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Algebry Liego macierzy nieskończonych

Prace S. Liego, W. Killinga i E. Cartana były początkiem systematycznego rozwoju teorii algebr Liego skończonego wymiaru. Wymienić trzeba tu klasyfikację prostych algebr Liego skończonego wymiaru nad ciałami algebraicznie domkniętymi (dla ciał charakterystyki zero w pracach E. Cartana i W. Killinga, a dla ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki $p > 3$ w pracach R. E. Blocka, R. L. Wilsona, H. Stradego, A. Premeta) oraz teorię reprezentacji (klasyfikację modułów nieprzywiedlnych liniowych algebr Liego) [6], [8].

Do dnia dzisiejszego nie istnieje ogólna teoria algebr Liego nieskończonego wymiaru. Kilka klas takich algebr było badanych z geometrycznego punktu widzenia: algebry Liego pól wektorowych, algebry Liego gładkich odwzorowań z rozmaitości w algebry Liego skończonego wymiaru, klasyczne algebry Liego operatorów w przestrzeniach Banacha i Hilberta oraz algebry Kaca-Moody'ego [7]. Algebraiczny punkt widzenia wystąpił w badaniach wolnych algebr Liego i algebr Liego z gradacją. W [1] opisano rezultaty dotyczące krat podalgebr nieskończonego wymiarowych algebr. W wielu pracach pojawiają się, jako przykłady, algebra Liego \mathfrak{gl}_∞ macierzy nieskończonych $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nad \mathbb{C} mających tylko skończenie wiele niezerowych współczynników i algebra Liego \mathfrak{gl}_J – uogólnionych macierzy Jacobiego mających niezerowe współczynniki tylko w skończenie wielu przekątnych. Odgrywają one istotną rolę w teorii reprezentacji i fizyce.

W literaturze brak jest systematycznych badań algebr Liego macierzy nieskończonych. W niniejszej dysertacji rozpatrujemy algebrę Liego nieskończonych macierzy column-finite indeksowanych \mathbb{N} , opisujemy ich kratę ideałów i różniczkowania. Rozważamy macierze nad pierścieniem R , przemiennym i z jednością.

W rozdziale pierwszym podajemy podstawowe definicje. Opisujemy ideały i różniczkowania macierzowych algebr Liego skończonego wymiaru. Przedstawiamy klasyfikację skończenie wymiarowych prostych algebr Liego nad \mathbb{C} .

W rozdziale drugim opisujemy różne kierunki w badaniach algebr Liego nieskończonego wymiaru i prezentujemy dwa przykłady algebr Liego nieskończonych macierzy \mathfrak{gl}_∞ i \mathfrak{gl}_J .

W trzecim rozdziale definiujemy algebrę Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, R)$ macierzy column-finite nad R indeksowanych liczbami naturalnymi. Dowodzimy, że algebra Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, R)$ jest izomorficzna z algebrą Liego macierzy column-finite indeksowanych liczbami całkowitymi. To pokazuje, że wszystkie wyniki zaprezentowane w niniejszej dysertacji są prawdziwe dla algebr Liego $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ macierzy column-finite. Przedstawiamy najważniejsze podalgebry Liego $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, R)$, dowodzimy pewnych ich własności.

Czwarty rozdział zawiera rezultaty dotyczące algebry Liego $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, R)$ macierzy nieskończonych o śladzie równym zero, mających niezerowe współczynniki

tylko w skończonej liczbie wierszy. Opisujemy jej strukturę. Dla dowolnego ciała K dowodzimy prostoty $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, K)$. Klasyfikacja finitarnych prostych algebr Liego nad ciałem charakterystyki 0 zawarta jest w pracach A. A. Baranova, a dla ciał algebraicznie domkniętych charakterystyki $p > 3$ w pracach A. A. Baranova i H. Stradego. Algebra Liego $\mathfrak{sl}_{fr}(\mathbb{N}, K)$ jest macierzową reprezentacją odpowiadającą jej finitarnej algebry Liego, w pracach [2], [4] zaprezentowany jest dowód prostoty wykorzystujący rachunek macierzowy i niezależny od charakterystyki ciała.

W piątym rozdziale dowodzimy, że każde różniczkowanie algebry Liego ściśle górnótrójkątnych nieskończonych macierzy nad R jest sumą różniczkowania wewnętrznego i diagonalnego. Wynik ten opublikowano w [3]. Pokazujemy również, że dowolne różniczkowanie $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, R)$ jest sumą różniczkowania wewnętrznego i centralnego [5].

Ostatni rozdział zawiera opis kraty ideałów $\mathfrak{gl}_{cf}(\mathbb{N}, K)$, który nie zależy od charakterystyki ciała K . Jako wniosek otrzymujemy nowy przykład nieprzeliczalnie wymiarowej prostej algebry Liego [5].

Literatura

- [1] R. K. Amayo, I. Stewart, *Infinite-dimensional Lie algebras*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.
- [2] W. Hołubowski, *New simple Lie algebra of uncountable dimension*, Linear Algebra and its Applications, vol. 492, 2016, 9–12.
- [3] W. Hołubowski, I. Kashuba, S. Żurek, *Derivations of the Lie algebra of infinite strictly upper triangular matrices over a commutative ring*. Comm. Algebra 45 (2017), no. 11, 4679–4685.
- [4] W. Hołubowski, S. Żurek, *Note on simple Lie algebras of infinite matrices*, Silesian J. of Pure and App. Math., vol.6, No 1, 2016, 23–26.
- [5] W. Hołubowski, S. Żurek, *Ideals and derivations of Lie algebras of infinite matrices*, praca w recenzji.
- [6] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
- [7] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras* Third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [8] H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic*. III. Completion of the classification. De Gruyter Expositions in Mathematics, 57. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2013.