mgr Szymon Draga
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Katowice, dn. 21 lutego 2017 r.

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Sumowalność i typ potęgowy indeksu Szlenka sum prostych przestrzeni Banacha

Celem rozprawy jest zbadanie zachowania sumowalności oraz typu potęgowego indeksu Szlenka ogólnych sum prostych przestrzeni Banacha. Ponadto podajemy przykłady przestrzeni o typie potęgowym równym 1, lecz niesumowalnym indeksie oraz wykazujemy, że sumowalność indeksu Szlenka, jak również jego typ potęgowy, wyznaczane są przez ośrodkowe podprzestrzenie.

Pojęcie indeksu Szlenka zostało wprowadzone przez Wiesława Szlenka w artykule [5] w celu udzielenia negatywnej odpowiedzi na pytanie o istnienie przestrzeni (izomorficzne) uniwersalnej w klasie wszystkich ośrodkowych i refleksywnych przestrzeni Banacha. Późniejsze badania wykazały wiele związków indeksu Szlenka z geometrią. Do głównych wyników należy zaliczyć twierdzenie Knausta, Odella i Schlumprechta, które pochodzi z pracy [4] i mówi, że indeks Szlenka ośrodkowej przestrzeni Banacha wynosi ω wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona asymptotycznie jednostajnie gładkie przenormowanie, co ponadto równoważne jest istnieniu normy *-słabo asymptotycznie jednostajnie wypukłej w przestrzeni sprzężonej. Dalsze fundamentalne twierdzenia dotyczące ośrodkowych przestrzeni o indeksie ω zostały udowodnione w artykule Godefroya, Kaltona i Lanciena [3].

W pierwszym rozdziale rozprawy podajemy podstawowe definicje i przykłady oraz krótko omawiamy związki indeksu Szlenka z asymptotyczną geometrią przestrzeni Banacha. Wyznaczamy typ potęgowy przestrzeni ℓ_p, a także przypominamy definicję oryginalnej przestrzeni Tsirelsona, która to stanowi refleksywny przykład przestrzeni o sumowalnym indeksie Szlenka. Zaprezentowane wyniki w dużej mierze stanowią matematyczny „folklor”.

Kolejny rozdział, który jest oparty na wspomnianej pracy [3], zawiera informacje o *-słabo zerowych odwzorowaniach drzewowych, które są wygodnym narzędziem służącym do opisu derywacji Szlenka. Podajemy także dość precyzyjne twierdzenia o przenormowaniach przestrzeni Banacha o indeksie ω.

Trzeci rozdział zawiera wyniki związane z sumowalnością indeksu Szlenka. Zaczynamy od opisu ogólnych sum prostych przestrzeni Banacha. Następnie dowodzimy, że c_0-suma prosta rodziny ośrodkowych przestrzeni z jednakowo sumowalnym indeksem Szlenka także ma sumowalny indeks Szlenka. W dalszej części pokazujemy, że analogon tego twierdzenia nie zachodzi dla ogólniejszych sum prostych (przykładem jest tu tsirelsonowska suma prosta przeliczalnie wielu kopii przestrzeni c_0); zachodzi on jednak w szczególnym przypadku – kiedy składowe przestrzenie są skończenie wymiarowe. Ta część rozprawy pochodzi głównie z artykułu [1].

W czwartym rozdziale zamieszczone zostały tezy rozprawy związane z typem potęgowym. Zaczynamy od przytoczenia pojęć przestrzeni ℓ_p-asymptotycznej i kraty Banacha, a następnie dowodzimy pewnych oszacowań w takich przestrzeniach. Dalej wyprowadzamy wzór na typ potęgowy ogólnej E-sumy prostej *potęgowo ograniczonego* ciągu ośrodkowych przestrzeni Banacha, przy założeniu ℓ_p-asymptotyki przestrzeni E^* względem bazy dualnej. Pokazujemy też, że założenie ℓ_p-asymptotyki jest istotne i wnioskujemy, że wspomniana tsirelsonowska suma prosta nieskończenie wielu kopii przestrzeni c_0 ma typ potęgowy 1. Podobnie jak wcześniej, opieramy się tu na wynikach z pracy [1].

W ostatnim rozdziale dowodzimy, że dana przestrzeń Banacha ma sumowalny indeks Szlenka wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej ośrodkowa podprzestrzeń ma tę własność. Podobnie pokazujemy, że dana przestrzeń Banacha o indeksie ω posiada ośrodkową podprzestrzeń, która ma ten sam typ potęgowy co cała przestrzeń. Wyniki te pozwalają na opuszczenie założenia ośrodkowości w twierdzeniach z poprzednich rozdziałów. Rozprawę kończymy wyznaczeniem typu potęgowego „długich" przestrzeni ℓ_p oraz podaniem nietrywialnego przykładu nieośrodkowej przestrzeni Banacha z sumowalnym indeksem Szlenka – przestrzeni funkcji ciągłych określonych na przestrzeni Mrówki. Ten rozdział został oparty na fragmencie artykułu [2] oraz wzbogacony przykładami.

Literatura

[1] S. Draga, T. Kochanek, *Direct sums and summability of the Szlenk index*, J. Funct. Anal. **271** (2016), 642–671.

[2] S. Draga, T. Kochanek, *The Szlenk power type and tensor products of Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **145** (2017), 1685–1698.

[3] G. Godefroy, N.J. Kalton, G. Lancien, *Szlenk indices and uniform homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 3895–3918.

[4] H. Knaust, E. Odell, Th. Schlumprecht, *On asymptotic structure, the Szlenk index and UKK properties in Banach spaces*, Positivity **3** (1999), 173–199.

[5] W. Szlenk, *The non-existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces*, Studia Math. **30** (1968), 53–61.