Recenzja rozprawy doktorskiej

Pana mgra Tomasza Witczaka

pt. „Modele otoczeniowe i topologiczne dla klasycznych i intuicjonistycznych logik modalnych”

dla

Rady Naukowej Instytuty Matematyki Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych Uniwersytet Śląski w Katowicach

Układ rozprawy

Rozprawa „Modele otoczeniowe i topologiczne dla klasycznych i intuicjonistycznych logik modalnych” podejmuje tematykę semantycznych badań nad logikami zdaniowymi powiązanymi z logiką intuicjonistyczną.

Rozprawa składa się z wprowadzenia, sześciu rozdziałów, zatytułowanych odpowiednio:

1. „Intuicjonistyczna logika modalna na bazie semantyki otoczeniowej”
2. „Badania nad semantyką topologiczną w kontekście $\mathbf{iKT}_{\Box}$”
3. „Intuicjonistyczne logiki nieznanych prawd i fałszywych wierzeń”
4. „Uogólnione topologie jako semantyka dla logik zdaniowych”
5. „Infra-topologie w kontekście logicznym”
6. „Pewne fakty na temat $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktur”,

ponadto Podsumowania i spisu literatury.

Zarówno wprowadzenie, jak i pozostałe rozdziały podzielone są na sekcje. Jak wspomniano, główny wątek dotyczy semantyki wariantów zdaniowej wersji logiki intuicjonistycznej, choć dołączono też nieco pobocznych rozważań, których celem jest wskazanie szerszego kontekstu oraz zasygnalizowanie dalszego kierunku badań.

Kompozycja pracy, podział na rozdziały oraz prezentacja nie budzą zastrzeżeń. Skład w systemie LaTeX jest poprawny, choć można znaleźć miejsca wymagające drobnych korekt. Pewne wątpliwości może rodzić użycie zapożyczeń językowych, takich jak ‘frameworku’ lub konstrukcji złożonych z wyrazu angielskiego i polskiego (‘prime-teoria’), czy też neologizmów, jak ‘gnet’. Oczywiście ma to związek z faktem, że literatura przedmiotu w głównej mierze jest anglojęzyczna. Z drugiej strony, pewne nagromadzenie konstruktów tego typu może niepotrzebnie kierować uwagę czytelnika na kwestie poboczne. Uwaga ta w żadnej mierze nie jest istotna przy merytorycznej analizie rozprawy, którą należy ocenić wysoko, doceniając wnikliwość Autora i jego warsztat formalny.

Mgr Tomasz Witczak demonstruje szereg ujęć logik nawiązujących do zdaniowej logiki intuicjonistycznej. Część z przedstawionych rozważań stanowi przywołanie znanych z literatury konstrukcji i rezultatów lub jest drobną ich modyfikacją, ale znacząca część prezentowanych wyników ma charakter autorski.

Doktorant świadom jest ograniczeń proponowanych technik, dlatego je aktywnie modyfikuje poszukując odpowiednich oczekiwanych rozwiązań. Niektórych spośród proponowanych ujęć nie udało się powiązać przykładowo z aksjomatyzacją semantycznie wyznaczonych systemów, a otrzymanych za pomocą dyskutowanych struktur, jednak poczynione przy tej okazji obserwacje są nie mniej wartościowe. Przypadki te wyznaczają listę interesujących problemów i otwartych pytań, wskazujących np. na możliwość dalszej 'ewolucji' zaprezentowanych formalnych obiektów. Co więcej, potwierdzają samoświadomość Autora świadcząc o jego uczciwości badawczej.

Analiza i ocena pracy

Rozdział pierwszy zawiera prezentację semantyki dla modalnego rozszerzenia logiki intuicjonistycznej i jego adekwatnego opisu w terminach semantyki otoczeniowej. Uwzględniono również charakterystykę wyrażoną za pomocą pojęcia bisymulacji. Zaprezentowano w szczególności wariant semantyki dla rozszerzenia intuicjonizmu, który powstaje przez wzbogacenie języka o funktor konieczności. Otrzymany system i$\mathbf{KT}_{\Box}$ (intuicjonistyczny odpowiednik modalnej logiki normalnej **T**) jest pełny względem klasy wyjściowych struktur otoczeniowych — **in1**-struktur. W rozdziale tym zaprezentowano ujęcie bi-relacyjne, które odpowiada układom dwu-relacyjnym, zastosowanym przez Božica i Došena dla semantycznego wyrażenia modalnych rozszerzeń intuicjonizmu: **S4K** oraz **S4Kc**. W rozprawie pokazano, że semantyka otoczeniowa dla i$\mathbf{KT}_{\Box}$ daje się przetłumaczyć na semantykę bi-relacyjną, w szczególności zachodzi wzajemna odpowiedniość między wprowadzonymi modelami otoczeniowymi a modelami bi-relacyjnymi, czego wyrazem jest punktowa równoważność danego typu modeli oraz wersji powstałych w wyniku translacji. Użyto stosowanej np. do standardowych logik modalnych techniki filtrowania, celem uzyskania struktur określonych na klasach abstrakcji. Pokazano punktową równoważność dla bi-relacyjnych modeli i ich wersji filtrowanych, zachodzenie własności skończonego modelu i rozstrzygalność logiki i$\mathbf{KT}_{\Box}$. W rozdziale tym rozpatrywane jest również rozszerzenie, w języku którego występuje implikacja. Analizie formalnej poddano zarazem zależności zachodzące między funktorami, jak i pewne warunki dodatkowe, nakładane na rozpatrywane uprzednio struktury otoczeniowe i bi-relacyjne. W rozdziale tym rozważana jest również równoważność modeli otoczeniowych wyrażona za pomocą *ograniczonych morfizmów*. Ograniczone morfizmy to funkcje, które zachowują przekroje i sumy otoczeń punktów. Pojęcie ograniczonego morfizmu użyte jest do wyrażenia równoważności formuły w świecie i w jego obrazie (tzw. *behawioralna równoważność*). Podobny równoważnościowy wynik przedstawiono dla relacji bismulacji. Za pomocą n-bisymulacji wyrażono równoważność w świecie danego modelu, polegającą na wymuszaniu formuł o określonym *stopniu* determinującym złożoność formuły w terminach liczby wystąpień funktora implikacji. Przebadano struktury bi-relacyjne i otoczeniowe pod względem spełniania pewnych rozpatrywanych w literaturze warunków. W tej części uwzględniono semantycznie określony operator **PAL** ('publicznego obwieszczania') podając aksjomatyczne określenie powstałego systemu wraz z dowodem twierdzenia adekwatności względem klasy odpowiednio zdefiniowanej podklasy struktur otoczeniowych.

Na koniec rozpatrzono rozszerzenie intuicjonizmu o dwa funktory modalne $\Box$ i $\blacksquare$, oraz warianty schematów o postaci aksjomatu (4), jednak z użytymi dwoma możliwymi wariantami funktora konieczności. Dla wybranych konfiguracji wariantów tychże aksjomatycznych schematów, sformułowano twierdzenie o adekwatności względem klasy struktur otoczeniowych spełniających odpowiednio dobrane warunki. W tym przypadku zastosowano technikę tłumaczenia formuł na formuły modalne, analogiczną do translacji użytej przez Gödla dla wyrażenia intuicjonizmu przez zanurzenie w modalną logikę normalną **S4**.

Rozdział drugi dotyczy semantyk otrzymanych za pomocą pewnych wariantów pojęcia przestrzeni topologicznej. Jako pierwszą zaprezentowano strukturę multi-topologiczną, która jest klasą przestrzeni topologicznych określonych w zbiorach, które sumują się do jednego wspólnego uniwersum, przy czym każda z przestrzeni, poza spełnianiem zwykłych dla topologii warunków, ma zbiór wyróżniony. Logika wyznaczona przez tak określoną klasę modeli nie została adekwatnie scharakteryzowana syntaktycznie, choć pokazano przykłady jej tez oraz formuł odrzuconych, w szczególności pokazano, że tautologią względem tejże klasy modeli jest prawo poprzedzania, zaś falsyfikowalne jest prawo przechodniości implikacji. W dalszej części rozpatrzono modele, gdzie każda topologia w strukturze multi-topologicznej, jest indukowana przez pewną wspólną topologię Aleksandrowa określoną na uniwersum struktury. W rozdziale tym pokazano, że jedna z użytych w rozprawie klas modeli otoczeniowych może być traktowana jako podklasa klasy modeli multi-topologicznych. Najpierw dla danej struktury otoczeniowej wyznaczono zbiory otwarte tworzące topologię w zwykłym sensie. Następnie, wskazano topologię Aleksandrowa μ na uniwersum struktury otoczeniowej, przy czym — jak wykazano — każda z uprzednio rozpatrywanych topologii jest indukowana przez μ. W rezultacie, dla każdego z rozpatrywanej klasy modeli otoczeniowych wyznaczono punktowo równoważny model multi-topologiczny. Pokazano również, jak przejść od struktur topologicznych — tym razem bez wyróżnionych zbiorów, do struktur otoczeniowych. Bazując na tej procedurze, wskazano dwa sposoby przejścia od modelu multi-topologicznego do odpowiadającego mu modelu otoczeniowego oraz znów pokazano, że oba modele są punktowo równoważne. Jeśli chodzi o wyjściowe modele, odmiennie zdefiniowano wartościowania. Dla jednego z nich pokazano, że znów istnieje odwrotne przejście tj. od modeli otoczeniowych z wprowadzoną inną topologią do modelu topologicznego.

Kolejny rozdział, zatytułowany „Intuicjonistyczne logiki nieznanych prawd i fałszywych wierzeń", zawiera składniki aplikacyjne. Rozpatrywane tu systemy odnoszą się w tym przypadku do pojęć epistemicznych. Rozdział ten w dużej mierze bazuje na wcześniej już opublikowanych pracach Autora, jednak dopełnia obraz prowadzonych badań. W tej części pracy rozpatrywany jest funktor W. Zastosowany do formuły, ma wyrażać przypadek, w którym formuła dana jest fałszywa, a mimo to agent ją głoszący, żywi przekonanie o jej zachodzeniu. Eksplikacją powodów, dla których uznawane jest pewne zdanie fałszywe, może być to, że istnieje świat podobny do świata realnego, w którym zdanie to jest prawdziwe, przy czym świat ów jawi się jako bardziej atrakcyjny od świata realnego. Na marginesie może należałoby dodać, że przynajmniej w części literatury logicznej dotyczącej tematyki operatorów epistemicznych, mówi się o przekonaniach, aniżeli o wierzeniach, z uwagi prawdopodobnie na możliwość powstawania nieporozumień wiążących się z użyciem w tym kontekście słowa 'wierzę'. Rozpatrywane konstrukcje modelowe różnią się od rozważań innych autorów tym, że w prezentowanym ujęciu zagwarantowano zachowanie intuicjonistycznych warunków dla prawdziwości formuł bez modalności, w szczególności monotoniczność relacji wymuszania. Podano też aksjomatyzację semantycznie wyznaczonego systemu, wraz ze stosowanymi twierdzeniami o pełności i trafności aksjomatyzacji. W rozdziale rozpatrzono również pewne wzmocnienie wyjściowego systemu. W szczególności, przeanalizowano rozszerzenia powstałe w wyniku dodania aksjomatu `C` w wersji z funktorem W oraz kolejne, otrzymane przez dołączenie reguły `RMW` stanowiącej odpowiednio dostosowany wariant reguły monotoniczności dla W, gdzie w poprzedniku implikacji będącej wnioskiem, dodatkowo dołączona jest negacja następnika implikacji stanowiącej przesłankę reguły. Dla obu tych logik udowodniono twierdzenia o pełności względem modeli nadbudowanych nad częściowo uporządkowanymi strukturami otoczeniowymi. W rezultacie uzyskano też twierdzenie o pełności dla logiki będącej najmniejszym nadsystemem obu tych logik. W rozdziale badane są ponadto cztery systemy, w których języku występują odpowiednio: funktor konieczności, możliwości, funktor uznanej, ale niechcianej prawdy i funktor nieznanej prawdy. Pan mgr Witczak pokazuje semantycznie, że w rozpatrywanym przypadku, funktory możliwości i konieczności nie są wzajemnie defniowalne, choć konieczność formuły implikuje zaprzeczenie możliwości jej negacji. W rozdziale tym sformułowano twierdzenie o pełności i trafności względem odpowiednich, częściowo uporządkowanych struktura otoczeniowych. Rozdział też zawiera dyskusję możliwości przebadania w jednym systemie zależności zachodzących między rozważanymi funktorami. Wskazano na pewne trudności wiążące się koniecznością utrzymania monotoniczności relacji wymuszania w modelu intuicjonistycznym przy jednoczesnym zachowaniu wzajemnej definiowalności wybranych spośród tychże funktorów. Rozdział kończy się zarysem teorii łączącej elementy semantyki otoczeniowej z ideą formalizacji rozumowań niepewnych. W tym celu rozpatrzono preporządki z dołączoną funkcją bi-otoczeniową, stosowaną w literaturze do zadania semantyki dla nie-normalnych logik modalnych będących rozszerzeniem intuicjonizmu. Należy podkreślić, że Autor rozprawy świadomy jest różnic i podobieństw w zakresie stosowanych przez siebie rozwiązań i technik innych autorów.

Rozdział czwarty znów nawiązuje do narzędzi topologicznych. Pan mgr Witczak przywołuje całą serię podejść do tematyki uogólniania pojęcia topologii. I tak, obok wskazanych przez Autora rozmaitych ujęć, takich jak: pre-topologie Choqueta, perytopologie Ahmeta i Terzilera, topologie zredukowane Grácio, uogólnione topologie i struktury słabe Császára, supra-topologie Masshoura, infra-topologie Al-Odhariego, σ-struktury Kima i Mina, 'dobre' topologie Powara i Rajaka, przestrzenie relatorowe Száza, struktury minimalne, których autorem jest Maki oraz uogólnione struktury słabe Avili i Moliny, można jeszcze przykładowo wskazać Grothendiecka topologie wyrażone w języku teorii kategorii oraz topologie Delfsa i Knebuscha. Ten częściowy wykaz pokazuje, jak dużymi kompetencjami należy wykazać się w trakcie badań nad semantyką topologiczną, gdzie niejednokrotnie różnice między poszczególnymi konstrukcjami są niuansowe. Autor doskonale w tej tematyce się porusza. Tak więc Pan mgr Witczak rozpatruje wybrane uogólnienia pojęcia przestrzeni topologicznej, uzyskane przez osłabienie pojęcia zbioru otwartego a wyrażane przez nałożone teoriomnogościowe zależności między zbiorem oraz operacjami domknięcia i wnętrza. Podano też przykłady odmiennego ujęcia topologii, które mogłyby stanowić alternatywę dla standardowego rozumienia tego pojęcia. Wśród opcji, której Pan mgr Witczak poświęca więcej uwagi, są zbiory podwójne rozumiane jako pary standardowych zbiorów, gdzie pierwszy z nich zawiera się w drugim. Intuicyjnie pierwszy wyraz miałby reprezentować to, co obowiązkowe, a drugi — co dopuszczalne. W pracy rozważane są możliwości, co do sposobu zdefiniowania operacji na zbiorach podwójnych, wliczając w to operacji uogólnione. Zaprezentowano częściowe wyniki dotyczące własności tych działań, przykładowo, udowodniono łączność. Uwzględniane operacje, w zamierzeniu miałyby być działaniami, na które domknięta byłaby rodzina stanowiąca wariant topologii. Dokładniejszej analizie poddano też uogólnione przestrzenie Császára. Rodzina jest topologią uogólnioną w sensie Császára wtw jest domknięta na dowolne sumy. Zatem osłabienie pojęcia w najogólniejszej wersji odbywa się przez pozostawienie tylko jednego spośród warunków nakładanych na rodzinę zbiorów otwartych. Uogólniona przestrzeń jest ponadto *topologiczna*, gdy całe uniwersum należy do rodziny (jest wówczas *silna*) i rodzina ta jest domknięta na skończone przekroje. Zbiory domknięte są rozumiane, jako dopełnienia zbiorów otwartych, dalej już, wnętrze i domknięcie zbioru mogą być również definiowane standardowo. Doktorant podkreśla, że idea rodzin domkniętych na dowolne sumy nie jest nowa, ale Császár podjął bardziej usystematyzowane badania nad takimi obiektami. Istotnym *novum* jest zaś zastąpienie topologicznego wnętrza, wnętrzem uogólnionym. Na **GT**$\mathcal{F}$-strukturę składa się uniwersum W, uogólniona topologia μ na W, zaś $\mathcal{F}$ to funkcja przyporządkowująca każdemu elementowi uniwersum, rodzinę zbiorów zawierających się w sumie całej uogólnionej topologii. Przy czym, jeśli dane w należy do tejże sumy, to wartością funkcji $\mathcal{F}$ od argumentu w jest rodzina wszystkich zbiorów otwartych, do których należy w; w przeciwnym przypadku wymagane jest tylko to, by $\mathcal{F}(w) \subseteq \mu$. Następnie definiowany jest silny **GT**-model, jako struktura nadbudowane nad silną **GT**-przestrzenią (czyli taką, że $W \setminus \bigcup \mu = \varnothing$) powstająca przez dołączenie wartościowania zmiennych zdaniowych. Formuła z funktorem konieczności jest prawdziwa/wymuszana w świecie w wtw gdy istnieje zbiór otwarty G, do którego należy w, przy czym formuła z opuszczonym funktorem konieczności jest wymuszana w każdym elemencie G. Każdemu silnemu **GT**-modelowi odpowiada silny **GT**-model otoczeniowy i odpowiadające sobie modele z obu klas są punktowo równoważne.

W rozdziale tym rozpatrywana jest również klasa modeli z intuicjonistycznym wymuszaniem implikacji w danym świecie, gdzie nakładany warunek zakłada, że w każdym elemencie pewnego otoczenia danego świata ma zachodzić warunek charakterystyczny dla implikacji materialnej. Poza podanymi przykładami formuł ogólnie prawdziwych oraz formuł falsyfikowalnych, nie została w tym przypadku wskazana aksjomatyzacja. Rozpatrywana jest też wersja pojęcia modelu z funkcją jako dodatkową składową, wykorzystywaną do interpretacji funktora konieczności w przypadku struktur, które nie są silne. Ogólnie znacząca część rozdziału poświęcona jest kwestii eksplikacji możliwości przechodzenia między semantyką otoczeniową a strukturami opartymi na uogólnionych topologiach. Ponadto wprowadzono różne rodzaje bisymulacji między dwiema takimi strukturami opartymi na uogólnionej topologiach z pomocniczą funkcją. System zdeterminowany przez struktury z uogólnioną topologią i funkcją wyznaczającą otoczenia nie został zaksjomatyzowany. Pomimo to uzyskane pewne częściowe rezultaty są istotne, gdyż lokalizują zawartość zdefiniowanych systemów. Rozdział kończy się analizą wersji **GT**$\mathcal{F}$-struktur wzbogaconych o interpretację dwóch wariantów funktora konieczności.

W przedostatnim rozdziale rozpatrzono przestrzenie infra-topologiczne Al-Odhariego. W przestrzeniach takich uwzględnione są możliwe definicje pojęcia zbioru otwartego i domkniętego, które mogłyby posłużyć do wyznaczenia topologii. Warto tutaj podkreślić, że Autor istotnie zmodyfikował i uściślił oryginalne określenia. Doktorant rozpatruje zachowanie zdefiniowanych własności na wybrane operacje teoriomnogościowe.

Uogólniony model infra-topologiczny posłużył do zadania semantyki dla logiki w języku z operatorami i spójnikami $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\bot$, $\neg$, $\Box$ oraz $\blacksquare$. Dla otrzymanego w ten sposób systemu **gITLog** udowodniono twierdzenie o pełności względem uogólnionych modeli infra-topologicznych.

W ostatnim szóstym rozdziale dyskutowane są kolejne warianty pojęcia zbioru otwartego i zbioru domkniętego, dla których udowodniono przykładowe zależności teoriomnogościowe, w tym też operacji uogólnionych. Celem tych dociekań jest ustalenie możliwości zbudowanie topologii uogólnionej. Pozostałe wątki poruszone w tym rozdziale są nieco bardziej poboczne. Ma to związek z zasygnalizowanymi trudnościami. Przykładowo, stały podwójnie uogólnionego ciąg nie musi być zbieżny. Można sądzić, że takie ograniczenia rodzą trudność choćby przy zastosowaniu ciągów uogólnionych do określenia np. domknięcia zbioru. Pokazano w jaki sposób za pomocą $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-struktury może być sformułowane i badane pojęcie zbieżności ciągu uogólnionego.

Przebadano kwestię jednoznaczności granicy uogólnionego ciągu stałego w terminach własności struktury. Rozpatrywane pojęcie zbieżności jest analogonem zbieżności dla zwykłych ciągów, a jednoznaczność granicy uogólnionego ciągu stałego jest równoważna ze spełnianiem przez strukturę aksjomatu oddzielania T_1.

Jeśli nie wliczać uwag końcowych, rozdział zwieńczony jest krótką analizą pojęć ciągłości, ale też otwartości funkcji przekształcającej uniwersum jednej struktury w uniwersum drugiej, które to pojęcia nawiązują do standardowego ich rozumienia.

Uwagi szczegółowe i sugestie poprawek

1. S. 8, l. 9 - termin 'pełność' coraz częściej zastępowany jest określeniem 'adekwatność';
2. s. 8, akapit siódmy od góry: 'nie będących' $\longrightarrow$ 'niebędących';
3. s. 10: symbol PV oznaczający zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych nie został uprzednio wprowadzony;
4. s. 10, warunki dla funktorów modalnych:

   Warunki powinny być zadane rekurencyjnie — nie przez odwołanie do funkcji V, ale do warunku spełniania/wymuszania. Szczególnie znaczenie odniesienia do prawdziwości/wymuszania widać w przypadku warunku dla możliwości, gdzie chodzi o to, że dopełnienie zbioru światów, w których formuła nie jest prawdziwa, nie należy do rodziny otoczeń przyporządkowanej przez $\mathcal{N}$ argumentowi w. Jest to oczywiście skrót myślowy, czy może skrótowe oznaczenie wyjaśnione na następnej stronie, jednak precyzyjny zapis ułatwiłby czytelnikowi lekturę;
5. s. 11, Definicja 1.1 — skrótowe oznaczenie '$\mathcal{N}_w$' dla wartości funkcji dobrze byłoby wprowadzić przed pierwszym użyciem, na stronie 10;

6. s. 11, Definicja 1.1 — warunek (b) można pominąć — wynika z (d): za X wystarczy przyjąć $\bigcap \mathcal{N}_w$;
7. s. 11, Definicja 1.3.(2):

   przed 'dla każdego' dobrze byłoby wstawić przecinek, by zaznaczyć, że kwantyfikator dotyczy całej równoważności;
8. Lemat 1.4:

   w założeniach lematu nie ma mowy o tym, że $X \subseteq W$ i założenie to chyba nie jest wykorzystywane w dowodzie;

   w przedostatniej linijce części '$\Rightarrow$' tego dowodu, raczej zamiast 'Ale jeśli' powiemy 'Ale skoro' — na tym etapie dowodu już nie zakładamy tego, że $u \in \bigcap \mathcal{N}_w$;

   na końcu przedostatniej linijki części '$\Leftarrow$' dowodu: '$\bigcap \mathcal{N}_u$' $\longrightarrow$ '$\bigcap \mathcal{N}_w$';
9. Twierdzenie 1.6:

   Dowód, punkt (1): w zapisie klamrowym zbioru zamiast 'z' powinno być 'v';
10. Twierdzenie 1.7:

    chyba częściej zamiast 'przystosowany do klasy', mówi się 'zgodny względem klasy';
11. Definicja 1.10:

    czy nie lepiej brzmiałoby 'teoria pierwsza', przez analogię np. do filtru pierwszego?
12. Definicja 1.12.(2).(a):

    wydaje się, że należałoby udowodnić, że podane wymogi są spełnialne, tzn. podać jakieś uzasadnienie, że takie wymogi dają się zrealizować;
13. Lemat 1.13:

    dowód, punkt (2), fakt, że $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$ — jeśli w definicji 1.12 modelu, punkty (a) i (b) są postulatami, jak ma się zachować przekrój i suma, to raczej nie powinno się sprawdzać czegoś, co ogólnie obowiązuje, jeśli tylko sumowana rodzina jest niepusta. Zatem może nawet przed sformułowaniem definicji 1.12 należałoby udowodnić, że zbiór z punktu (2a) definicji 1.12 $\{v \in W : w \subseteq v\}$ jest zawarty w zbiorze z punktu (2b) definicji 1.12 $\{v \in W : \Box\varphi \in w \Rightarrow \varphi \in w\}$, potem postulować warunki (2a) i (2b), a dowodzie Lematu 1.13 nie uzasadniać czegoś, co gwarantuje teoria mnogości;

    dowód, punkt (2), ostatnia linijka — przywołanie faktu, że $\Box\varphi \in w$ jest w tym miejscu chyba zbędne;
14. s. 15, linijka 9:

    może zamiast 'główny lemat dla modeli kanonicznych' lepiej: 'zasadnicze twierdzenie dla modeli kanonicznych' lub 'podstawowe twierdzenie dla modeli kanonicznych' (dokładnie jak na stronie 92)?
15. Twierdzenie 1.14

    dowód (1), część ($\Leftarrow$), koniec trzeciej linijki od końca:

    należałoby poprawić zdanie stylistycznie;

    dowód (2), część ($\Rightarrow$), przedostatnia linijka:

    zamiast '$u \in \bigcup \mathcal{N}_u$' powinno być raczej '$u \in \bigcup \mathcal{N}_w$';

    dowód (2), część ($\Rightarrow$), ostatnia linijka:

zamiast pierwszego wystąpienia 'φ' powinno być 'ψ';

dowód (2), część ($\Leftarrow$), ostatnia linijki:

'[...] definicji $\bigcup \mathcal{N}_w$' — raczej nie chodzi o definicję sumy, ale definicję **in1**-modelu kanonicznego;

16. Lemat 1.13:

    może zamiast 'gnet', przyjąć określenie 'g-net'?

    warunek 4 w Definicja 2.1 powinien być skorygowany — w określeniu zbioru $\mathcal{X}$ nie występuje zmienna q;

17. Twierdzenie 1.20:

    dowód, punkty (1) i (2) — mamy podane warunki dla sumy i iloczynu, ale nie powinny być one traktowane jako definicja (powyżej czytamy: 'Zdefiniujmy (dla każdego $w \in W$) dwa zbiory'); raczej należałoby wprowadzić osobne oznaczenie dla elementów najmniejszego i największego, i o nich coś postulować; oczywiście można ten zapis traktować jako pewien skrót myślowy, jednak formalnie taki zapis może budzić wątpliwości;

18. Definicja 1.22:

    wydaje się, że wprowadzone pojęcie modelu oraz fakt, że formuła nie jest wymuszana, nie odgrywają roli w definicji;

    zbiór Σ jest zależny od γ, więc może należałoby parametryzować Σ symbolem γ?

19. Definicja 1.24(2) i (3):

    lepiej chyba zachować stosowanie implikacji metajęzykowej, aniżeli mówić o wynikaniu;

20. Definicja 1.27:

    w trzeciej linijce zamiast 'W' powinno być 'W_Σ';

21. Lemat 1.31:

    wydaje się, że w dowodzie jest jakaś luka;

22. Lemat 1.37:

    ostatnia linijka dowodu — dobrze byłoby chyba odnotować, że skoro $\Box\beta \in \Sigma$, zatem również $\beta \in \Sigma$ i dlatego można zastosować warunek dla $\leqslant_\Sigma$;

23. Definicja 1.44.(1):

    mamy 'for any';

24. s. 22, 6 linijka od dołu:

    'To oznacza, że' $\longleftarrow$ 'To znaczy, że';

25. Lemat 1.59:

    dowód skończył się stwierdzeniem, że $u \Vdash \Diamond\varphi$, zaś do wykazania inkluzji wymagane byłoby $u \Vdash \varphi$;

26. Lemat 1.63.(3):

    powinna być strzałka '$\Rightarrow$' zamiast '$\Leftarrow$', ponadto zamiast 'cap' powinno być '$\cap$' (podobnie w trzeciej linijce od końca dowodu);

27. s. 30, 5 linijka:

    symbol '$\Delta\delta$' najprawdopodobniej powinien być skorygowany (podobnie w Lemacie 1.65);

28. s. 30, 3–2 linijka od dołu: ‘**in1**-struktur’ $\longleftarrow$ ‘$\mathbf{in1}_{PAL}$-struktur’
29. s. 33, 11 linijka od dołu — System **CL2.4** nie został wprost zdefiniowany, choć można się domyślić, że chodzi o rozszerzenie **CL1** o schematy wskazane w warunkach (1) i (3);
30. s. 35, szósty akapit:

    ‘Nasz podejście’ $\longrightarrow$ ‘Nasze podejście’;
31. Definicja 2.1:

    warunek (1) można pominąć;
32. s. 36, linijka 9 od doły:

    dobrze byłoby dodać nawiasy dla przechodniości implikacji;
33. s. 39, linijka 11: zamiast przekroju powinna być suma;
34. s. 46:

    poniżej definicji 3.4 mamy umowę, która już dużo wcześniej była stosowana;
35. Definicja 3.10:

    mowa jest o trójce, która jest piątką a powinna być czwórką uporządkowaną (podobnie w Definicji 3.38);
36. Twierdzenie 3.14.

    dowód — zamiast ‘W’ powinno być ‘$\mathcal{N}_W$’;
37. Definicja 3.23:

    kwantyfikacja po φ jest zbędna (φ występuje w zakresie definiowanego zbioru/operatora abstrakcji);
38. s. 50, pierwsza linijka:

    może warto dodać, że chodzi o warunek z Definicji 3.2, za strony 46;
39. Twierdzenie 3.26:

    w środkowej części dowodu ‘$\Rightarrow$’ jest pewna luka;

    część ‘$\Leftarrow$’: ‘Zatem $\neg\varphi \in w$, a stąd $w \Vdash \neg\varphi$’ — chyba należałoby wspomnieć, że nie można tu powołać się na założenie indukcyjne;
40. s. 51, linijki 15-16:

    raczej nie powiemy, że reguła nie jest prawdziwa, lecz — przykładowo — że jest zawodna;
41. s. 58:

    co intuicyjnie znaczy prawdopodobieństwo formuły, w szczególności ‘prawdopodobieństwo formuły w świecie w’?
42. s. 60, ostatnia linijka: w kontekście rezygnacji z reguły modus ponens, może warto byłoby poczynić jakąś dyskusję na temat zastosowań takich systemów, czy przykład takiej teorii można byłoby podać na gruncie praktyki matematycznej?
43. s. 61: w punkcie trzecim mamy dwa razy ‘są’;
44. s. 73, linijka 2:

    formuła (2) — czy nie byłaby konieczna korekta tej formuły?

    czwarta linijka od dołu:

    ‘$\backslash_w$’ $\longrightarrow$ ‘n_w’;

45. s. 74:

    mamy tłumaczenie symbolu sumy oraz dalej wprowadzenie oznaczenia dla wnętrza zbioru — w połowie pracy, gdy odpowiednie operatory były już stosowane wielokrotnie, eksplikacja standardowych oznaczeń/pojęć jest raczej niepotrzebna;

46. s. 81, linijka 8:

    zamiast ‘X’ powinno być ‘X_w’;

47. Twierdzenie 4.40:

    dowód części ($\subseteq$) — zapis ‘$w \in G_w$’ wygląda niezręcznie; należenie owo zachodzi na mocy uprzednio przyjętej umowy i stosowna informacje kryje się pod samym symbolem ‘G_w’;

48. s. 84, przypis 33:

    wprowadzona umowa jest istotna i raczej nie powinna być zamieszczana w przypisie;

49. Twierdzenie 4.44 — w ogólnym przypadku (o ile funkcja nie jest iniekcją) zachodzi inkluzja z prawej do lewej, zatem dobrze byłoby w ostatniej równości drugiego akapitu dowodu dołączyć stosowne uzasadnienie równości;

50. Definicja 4.58 — rozróżnienie oznaczeń nie jest chyba restrykcyjnie przestrzegane: jeśli W_μ jest zbiorem wszystkich teorii maksymalnych względem logiki **gTop**, to czym jest W?

51. s. 92: oznaczenie dla zbioru $\hat{\varphi}$ było już ogólnie wprowadzone na stronie 48;

52. s. 101, pierwsza linijka:

    pojęcie teorii łączy się raczej z ‘domkniętością’ na jakiś operator czy relację konsekwencji lub regułę, zazwyczaj modus ponens.

53. Definicja 5.29.(5):

    w nie jest skwantyfikowane;

54. s. 104, ostatnia linijka:

    żeby otrzymać oczekiwany rezultat, należałoby raczej wziąć kwadrat o współrzędnych wierzchołków $(0,-1),(0,1),(2,1),(2,-1)$;

55. Definicja 6.25: w definicji 6.24, (f_λ) literalnie oznaczało zbiór wartości funkcji f, tu zaś — prawdopodobnie przez nawiązanie do standardowych oznaczeń — jest ‘gnetem’ (czyli rodzajem ciągu uogólnionego).

56. Definicja 6.47:

    bardziej czytelnie byłoby, gdyby zmienne w i w' były wprowadzone przed obiema równoważnościami;

57. Bibliografia wymaga pewnego uporządkowania — znalazłem pozycje: bez podanych stron, z pominiętym nazwiskiem autora oraz z pełnymi imionami (podczas gdy w pozostałych przypadkach są tylko inicjały).

Chciałbym podkreślić, że powyższe uwagi mają charakter marginalny i w żaden sposób nie obniżają wysokiej, ogólnej ocenę rozprawy.

Konkluzja

W świetle przedłożonej opinii o rozprawie doktorskiej pt. *Modele otoczeniowe i topologiczne dla klasycznych i intuicjonistycznych logik modalnych* uważam, że Pan mgr Tomasz Witczak jest badaczem legitymującym się wysokimi kompetencjami formalnymi i dużą erudycją, recenzowana zaś rozprawa jest zaawansowana technicznie, oddaje aktualny stan badań, ale też zawiera oryginalne wyniki jej Autora.

Niniejszym zatem, zgodnie z zapisami *Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki* stwierdzam, że przedłożona do oceny rozprawa mgra Witczaka stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego polegającego na przebadaniu otoczeniowej i topologicznej semantyki dla pewnej klasy systemów powiązanych z logiką intuicjonistyczną, oraz wnioskuję o dopuszczenie mgra Tomasza Witczaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Toruń, 17 września 2021 r.

dr hab. Marek Nasieniewski, prof. UMK