mgr Weronika Biedrzycka
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Katowice, 7 maja 2018 r.

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Istnienie gęstości niezmienniczych dla semiukładów dynamicznych ze skokami

W rozprawie zajmować się będziemy problemem istnienia gęstości niezmienniczych dla kawałkami deterministycznych procesów Markowa (KDPM), zwanych inaczej semiukładami dynamicznymi ze skokami. Ta klasa procesów znajduje liczne zastosowania w modelowaniu procesów biologicznych. W szczególności, istnienie gęstości niezmienniczych jest bardzo istotne dla analizy takich modeli.

KDPM to proces z czasem ciągłym $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$, dla którego istnieje rosnący ciąg tzw. momentów skoków (t_n). Pomiędzy dwoma kolejnymi skokami proces jest deterministyczny. Dokładną definicję (w oparciu o [4]) podajemy w rozdziale 1. KDPM badamy z wykorzystaniem teorii półgrup podstochastycznych na przestrzeni L^1 funkcji całkowalnych względem ustalonej miary m. Rozdział 2 poświęcamy na zdefiniowanie wielu niezbędnych nam pojęć, jak półgrupy podstochastyczne i gęstości niezmiennicze. Przywołujemy także wyniki pozwalające podać warunki dostateczne (oparte na [7]) na istnienie i jednoznaczność gęstości niezmienniczej dla operatorów Markowa. Cytujemy również (za [6]) twierdzenia o asymptotyce półgrup podstochastycznych.

Problem istnienia gęstości niezmienniczych dla półgrup podstochastycznych omawiamy obszernie w rozdziale 3. Korzystając z wyników uzyskanych w [9] otrzymujemy istnienie tzw. półgrupy minimalnej podstochastycznej $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ dla procesu $\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ i jedynego operatora Markowa K na L^1, który spełnia warunek: jeżeli rozkład zmiennej losowej $X(0)$ ma gęstość f, tzn.

$$\Pr(X(0) \in B) = \int_B f(x)m(dx)$$

dla podzbiorów mierzalnych B przestrzeni stanów procesu, to $X(t_1)$ ma gęstość Kf. Związki pomiędzy gęstościami niezmienniczymi operatora K oraz gęstościami niezmienniczymi półgrupy minimalnej $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ są głównym tematem tego rozdziału. Kluczowe są tu twierdzenia 3.5 i 3.12, a także wynikający z nich wniosek 3.14. Ta część rozprawy oparta jest przede wszystkim na artykule [1].

Rozdział 4 poświęcimy zagadnieniu istnienia gęstości niezmienniczych dla semiukładów ze skokami. Jednym z głównych wyników jest twierdzenie 4.2. Podaje ono warunki wystarczające na istnienie jedynej gęstości niezmienniczej dla kawałkami deterministycznego procesu Markowa. W przeciwieństwie do publikacji [3] oraz monografii [5], w naszych wynikach nie musimy zakładać, że proces jest niewybuchający, a miary niezmiennicze, których poszukujemy są absolutnie ciągłe. Dodatkowo, uzyskujemy asymptotyczną stabilność półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ (twierdzenie 4.6), tzn. fakt, że gęstość $X(t)$ zbiega do gęstości niezmienniczej w L^1 niezależnie od gęstości $X(0)$. W sekcji 4.2 podajemy warunki dostateczne na istnienie gęstości niezmienniczych i asymptotyczną stabilność półgrupy $\{P(t)\}_{t\geqslant 0}$ w formie ułatwiającej praktyczne zastosowanie, czyli zapisane za pomocą lokalnych charakterystyk semiukładów ze skokami. W końcowej sekcji rozdziału 4 pokazujemy, jak w naszym języku zapisywać układy dynamiczne z losowym przełączaniem (opisane np. w [6]). Również ten rozdział powstał na podstawie publikacji [1].

W ostatnich dwóch rozdziałach prezentujemy sposób zastosowania naszych wyników do analizy modeli biologicznych. Jest to dwuwymiarowy model ekspresji genu z tzw. burstingiem (rozdział 5 oparty na [1]) oraz proces fragmentacji (rozdział 6 pochodzący z [2]). Nasz warsztat może być więc stosowany przy analizie procesów biologicznych opisanych za pomocą KDPM ([8]), jak np. dla ekspresji genu z tzw. burstingiem, do dynamiki z przełączeniami czy dla procesu fragmentacji.

Literatura

[1] W. Biedrzycka and M. Tyran-Kamińska. Existence of invariant densities for semiflows with jumps. *J. Math. Anal. Appl.*, 435(1):61–84, 2016.

[2] W. Biedrzycka and M. Tyran-Kamińska. Self-similar solutions of fragmentation equations revisited. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 23(1):13–27, 2018.

[3] O. L. V. Costa. Stationary distributions for piecewise-deterministic Markov processes. *J. Appl. Probab.*, 27(1):60–73, 1990.

[4] M. H. A. Davis. Piecewise-deterministic Markov processes: a general class of nondiffusion stochastic models. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 46(3):353–388, 1984.

[5] M. H. A. Davis. *Markov models and optimization*, volume 49 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London, 1993.

[6] K. Pichór and R. Rudnicki. Continuous Markov semigroups and stability of transport equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 249:668–685, 2000.

[7] R. Rudnicki. On asymptotic stability and sweeping for Markov operators. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 43(3):245–262, 1995.

[8] R. Rudnicki and M. Tyran-Kamińska. *Piecewise deterministic processes in biological models*. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer, Cham, 2017. Springer Briefs in Mathematical Methods.

[9] M. Tyran-Kamińska. Substochastic semigroups and densities of piecewise deterministic Markov processes. *J. Math. Anal. Appl.*, 357:385–402, 2009.