UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU
Wydział Matematyki
i Informatyki

Prof. dr hab. Krzysztof Frączek
Wydział Matematyki i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 22 marca 2024

Recenzja w postępowaniu o nadanie stopnia doktora habilitowanego
dr Hannie Wojewódce-Ściążko

Dr Hanna Wojewódka-Ściążko jest specjalistką z zakresu teorii prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych oraz ich zastosowań do modelowania dynamiki zjawisk biologicznych. Jej zainteresowania badawcze skupiają się wokół zagadnień dotyczących procesów Markowa i stowarzyszonych z nimi operatorów lub półgrup Markowa. W tym zakresie podejmowała badania nad problemem istnienia miar stacjonarnych, ich jedyności oraz ciągłości w zależności od zmian parametrów. Innym ciekawym problemem podejmowanym w badaniach Habilitantki to zachodzenie prawa wielkich liczb, centralnego twierdzenia granicznego oraz prawa iterowanego logarytmu dla procesów Markowa. Są to ważne i aktualne zagadnienia a wszystkie pojawiające się w literaturze kryteria dotyczące wspomnianych kwestii spotykają się z zainteresowaniem środowiska. Szczególnie dwa ostatnie zagadnienia są ważne w teorii procesów stochastycznych a ich dowody zwykle są technicznie skomplikowane.

Dr Hanna Wojewódka-Ściążko jest absolwentem Uniwersytetu Gdańskiego. W roku 2015 uzyskała stopień doktora również na Uniwersytecie Gdańskim na podstawie rozprawy doktorskiej pt. „Ergodyczne własności pewnych stochastycznych układów dynamicznych" napisanej pod kierunkiem prof. dra hab. Tomasza Szarka. Od 2016 r. Habilitantka pracuje na etacie adiunkta w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach.

Habilitantka jest do tej pory autorem 16 opublikowanych prac naukowych z zakresu teorii prawdopodobieństwa, procesów stochastycznych i teorii informacji.

Ocena osiągnięć badawczo-naukowych Habilitantki. W skład osiągnięć naukowych przedstawionych do oceny w postępowaniu habilitacyjnym wszedł cykl 6 prac naukowych pod wspólnym tytułem „Opis ergodyczny pewnych klas niestacjonarnych procesów Markowa o wartościach w przestrzeniach polskich":

[H1] R. Kukulski, H. Wojewódka-Ściążko, *The e-property of asymptotically stable Markov-Feller operators*, Colloq. Math. 165 (2021), 269-283,
[H2] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *Ergodic properties of some piecewise-deterministic Markov process with application to gene expression modelling*, Stoch. Proc. Appl. 130 (2020), 2851-2885,
[H3] D. Czapla, S.C. Hille, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *Continuous dependence of an invariant measure on the jump rate of a piecewise-deterministic Markov process*, Math. Biosci. Eng. 17 (2020), 1059-1073,
[H4] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *A useful version of the central limit theorem for a general class of Markov chains*, J. Math. Anal. Appl. 484 (2020), 123725,
[H5] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *The Strassen invariance principle for certain non-stationary Markov-Feller chains*, Asymptot. Anal. 121 (2021), 1-34,
[H6] K. Czudek, T. Szarek, H. Wojewódka-Ściążko, *The law of the iterated logarithm for random interval homeomorphisms*, Isr. J. Math. 246 (2021), 47-53.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń, Polska, tel. +48 56 611 3410, fax +48 56 611 29 87, e-mail: wmii@mat.umk.pl
www.mat.umk.pl

UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU
Wydział Matematyki
i Informatyki

Wspólnym mianownikiem badań prowadzonych przez Habilitantkę jest użycie operatora (lub półgrupy) Markowa działającego na przestrzeni miar probabilistycznych do badania własności ergodycznych i stochastycznych dla pewnych klas procesów Markowa, które naturalnie pojawiają się w zastosowaniach. Tutaj istotną własnością jest asymptotyczna stabilności, która żąda aby ciąg iteracji operatora Markowa startujący z dowolnej miary był zbieżny do miary niezależnej od miary startowej. Ta własność łatwo implikuje jedyność miary stacjonarnej. W przypadku kontroli tempa zbieżności, możemy otrzymać znacznie subtelniejsze stochastyczne własności procesu.

Inną istotną własnością jest e-property, która jest stosowana w dowodzeniu stochastycznych własności procesów Markowa. Operator Markowa spełnia e-property, nie wchodząc w szczegóły, gdy ciąg iteracji operatora dualnego (tak naprawdę pre-dualnego) jest w pewnym sensie równociągły. Warunek równociągłości jest spełniony dla każdej funkcji testowej i każdego punktu w przestrzeni stanów, na której żyje proces. W artykule [H1] autorzy dokonali porównania tych dwóch własności poprzez pokazanie, że dla operatorów Markowa-Fellera asymptotyczna stabilność „prawie" implikuje e-property, w tym sensie, że zbiór punktów, na którym warunek równociągłości nie jest spełniony jest zbiorem pierwszej kategorii. Ten rezultat okazuje się być optymalny.

Jedną z kluczowych klas procesów stochastycznych badanych przez Habilitantkę są losowo zaburzane potoki deterministyczne, tworzone poprzez losowe przeskakiwanie pomiędzy kilkoma deterministycznymi potokami z dodatkowym przeskokiem w przestrzeni stanów. Dokładniej, są to procesy stochastyczne $(X(t))_{t\geqslant 0}$ wygenerowane przez skończoną rodzinę układów dynamicznych (z czasem ciągłym) na przestrzeni stanów X w ten sposób, że orbity procesu biegną kawałkami po orbitach układów przeskakując losowo pomiędzy orbitami wszystkich układów dynamicznych. Czasy kolejnych przeskoków $(t_k)_{k\geqslant 0}$ tworzą proces o niezależnych przyrostach o tym samym rozkładzie wykładniczym z parametrem intensywności λ. Oprócz analizowania procesu $(X(t))_{t\geqslant 0}$ istotnym jest również badanie własności procesu jego wartości po skokach, tzn. procesu $(x_k)_{k\geqslant 0}$, gdzie $x_k = X(t_k)$ dla $k \geqslant 0$. Rozważmy dodatkowo proces $(\xi(t))_{t\geqslant 0}$, który wskazuje indeks układu dynamicznego wykorzystywanego przez orbitę w czasie t. Proces ten jest stały na odcinkach $[t_k, t_{k+1})$ dla $k \geqslant 0$, więc w istocie wyznaczony przez $(\xi_k)_{k\geqslant 0}$, gdzie $\xi_k = \xi(t_k)$ dla $k \geqslant 0$. Jeśli reguły przeskakiwania pomiędzy układami dynamicznymi i stanami są markowowskie, to również procesy $(X(t), \xi(t))_{t\geqslant 0}$ oraz $(x_k, \xi_k)_{k\geqslant 0}$ są procesami Markowa. W pracy [H2] zaproponowano badanie pewnej klasy takich procesów spełniających pewne rozsądne założenia. Opisano ściśle relacje łączące miary stacjonarne dla procesu dyskretnego z procesem ciągłym. Ponadto, udowodniono wykładniczą prędkość w warunku asymptotycznej stabilności. To z kolei posłużyło do udowodnienia silnego prawa wielkich liczb dla obu wcieleń procesu, w wersji gdy proces startuje z dowolnego, ale ustalonego punktu przestrzeni stanów X. Jak zgaduję, to właśnie Habilitantka nazywa niestacjonarnym procesem Markowa. Natomiast wykładnicza prędkość zbieżności jest dowodzona przy wykorzystaniu tzw. couplingów.

W pracy [H3] rozpatrywana jest ta sama klasa procesów, które z asymptotycznej stabilności mają jedyne miary stacjonarne. Tutaj dowodzi się ciągłej zależności takich miar przy zmieniającym się parametrze intensywności skoków λ. W dużej mierze korzysta się tu z technik wypracowanych w [H2]

Praca [H4] jest poświęcona wypracowaniu technik pozwalających na dowodzenie cen-

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń, Polska, tel. +48 56 611 3410, fax +48 56 611 29 87, e-mail: wmii@mat.umk.pl
www.mat.umk.pl

tralnego twierdzenia granicznego dla procesów Markowa. Głównym rezultatem pracy jest Twierdzenie 3.2, które tworzy efektywne kryterium pozwalające dowodzić centralnego twierdzenia granicznego w wersji niestacjonarnej. Kluczowym elementem dowodu jest wykorzystanie rezultatu Maxwella-Woodroofe'a w połączeniu z wykładniczym zanikiem w warunku asymptotycznej stabilności. W finałowej części pracy wspomniane kryterium zostało wykorzystane do dowodu centralnego twierdzenia granicznego dla kawałkami deterministycznych procesów Markowa badanych w [H2], przy odpowiednich założeniach na parametry modelu.

Praca [H5] idzie jeszcze dalej i jest poświęcona dowodzeniu prawa iterowanego logarytmu w wersji Strassena. Głównym rezultatem pracy jest Twierdzenie 4.7, które daje efektywne kryterium pozwalające dowodzić prawa iterowanego logarytmu w wersji niestacjonarnej dla procesów Markowa. Ponownie punktem wyjścia jest istotne wykorzystanie wykładniczego zaniku w warunku asymptotycznej stabilności. W finałowej części pracy wspomniane kryterium zostało wykorzystane do dowodu prawa iterowanego logarytmu dla kawałkami deterministycznych procesów Markowa, przy odpowiednich założeniach na parametry modelu.

Praca [H6] koncertuje się na modelu innym niż dotychczas opisywane. Są to iterowane układy funkcyjne wyznaczone przez m rosnących dyfeomorfizmów $f_1, \ldots, f_m$ odcinka $[0, 1]$ oraz rozkład prawdopodobieństwa $(p_1, \ldots, p_m)$, dla których krańce przedziałów są odpychające w średniej, tzn.

$$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{m} p_i \log f_i'(0) > 0, \quad \Lambda_1 = \sum_{i=1}^{m} p_i \log f_i'(1) > 0.$$

Stowarzyszony z tym układem proces jest również Markowa. Korzystając z wcześniej uzyskanych (przez pozostałych autorów tej pracy) własności powiązanego z układem operatora Markowa oraz kryterium Zhao-Woodroofe'a, w prosty sposób udowodniono prawo iterowanego logarytmu, w wersji niestacjonarnej.

Rezultaty powyżej omówionych sześciu artykułów stanowią mocny wkład w zrozumienie własności stochastycznych istotnych klas procesów Markowa, które mają zastosowania w modelach biologicznych. Końcowe twierdzenia w pracach [H2]-[H5] są formułowane tak, aby łatwo zweryfikować potrzebne założenia, co stanowi istotną zaletę w przypadku matematyki stosowanej. Inną zaletą otrzymanych rezultatów jest fakt, że sformułowane są w wersji niestacjonarnej oraz bez większych założeń na przestrzeń stanów. Te dwa aspekty wymagały od autorów sporej ekwilibrystyki technicznej i wypracowania nowych metod. Za najbardziej wartościowe uważam główne rezultaty prac [H2] i [H6]. One potrzebowały największej inwencji twórczej.

W dorobku Habilitantki znajduje się jeszcze 7 artykułów podejmujących podobną tematykę co w osiągnięciu habilitacyjnym (tzn. wykorzystanie własności spektralnych operatora Markowa do badania procesów Markowa), otrzymane w kolaboracji ze stałym gronem współpracowników. Część z technik i twierdzeń tam wypracowanych stanowi podstawę dalszych rezultatów z osiągnięcia habilitacyjnego. Mój niepokój budzi fakt, że trudno ocenić jak duży rzeczywiście jest wkład Habilitantki w otrzymane rezultaty. Oprócz dwóch prac, jednej samodzielnej i jednej, w której Habilitantka jest opiekunką pracy magisterskiej, wszystkie w tej tematyce są napisane w podobnym składzie wieloautorskim.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń, Polska, tel. +48 56 611 3410, fax +48 56 611 29 87, e-mail: wmii@mat.umk.pl
www.mat.umk.pl

UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU
Wydział Matematyki
i Informatyki

W ogólnym dorobku Habilitantki można znaleźć również trzy artykułu napisane we współpracy z fizykami matematycznymi, trudno mi je ocenić. Są one opublikowane w wysoko notowanych czasopismach, co może wskazywać na wysoki poziom osiągniętych rezultatów. Świadczą one również o szerszym spojrzeniu Habilitantki na matematykę, nie tylko ograniczonym do jednak dość wąskiej podstawowej tematyki badań.

Podsumowanie recenzji. Jak już wspomniałem wcześniej dorobek naukowy Habilitantki oraz jego wartość oceniam wysoko. Uważam, że uzyskane rezultaty stanowią znaczny wkład w rozwój teorii procesów stochastycznych i ich zastosowań. Habilitantka jest prężnie rozwijającą się dojrzałą matematyczką o niebanalnych horyzontach naukowych i zauważalnej współpracy międzynarodowej. W związku z tym popieram wniosek o nadanie dr Hannie Wojewódce-Ściążko stopnia naukowego doktora habilitowanego nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka.

Krzysztof Frączek

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń, Polska, tel. +48 56 611 3410, fax +48 56 611 29 87, e-mail: wmii@mat.umk.pl
www.mat.umk.pl