dr hab. prof.US Piotr Krasoń
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Szczecińskiego
ul.Wielkopolska 15
70-453 Szczecin

Szczecin 26.11.2019

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym doktora Pawła Gładkiego.

Dr Paweł Gładki we wniosku o wszczęcie przewodu habilitacyjnego jako osiągnięcie naukowe przedstawił cykl siedmiu prac spójnych tematycznie, dotyczą one teorii form kwadratowych. Spośród zaprezentowanych prac trzy są samodzielne, trzy napisane wspólnie z Prof. Murray Marshallem jedna wspólnie z K. Worytkiewiczem. 6 prac jest opublikowanych bądź przyjętych do druku w prestiżowych czasopismach matematycznych, jedna w Ann. Math. Siliesianae - czasopiśmie o mniejszym zasięgu. Ten ostatni fakt oczywiście nie przekreśla wartości opublikowanej tam pracy.

Doktor Paweł Gładki zajmuje się teorią form kwadratowych, w szczególności badaniem pierścienia Witta W(F) dla różnych ciał. Głównym tematem przedstawionych prac jest zastosowanie teorii hiperciał do badania form kwadratowych. Habilitant podzielił swoje osiągnięcie na trzy podgrupy:

1 Prace E1-E3 poświecone są zastosowaniu hiperciał w badaniu równoważności Witta

2 Prace O1-O3 dotyczą badania wyższych porządków w teorii hiperciał i multi-pierściemi.

3 Praca P1 dotyczy aksjomatycznej teorii form kwadratowych.

Ad1. Dla ciała F Niech $Q(F)$ oznacza grupę $F^{\times}/F^{\times 2}$ wraz z wielowartościowym dodawaniem określonym za pomocą form kwadratowych. Dla binarnych form kwadratowych i ciał charakterystyki róznej od dwóch oraz $F \neq \mathbb{F}_3$ i $F \neq \mathbb{F}_5$ hiper-dodawanie określone jest w następujący sposób:

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \{\bar{a} \in F^{\times}/F^{\times 2} : \exists x_1, x_2 \in F \mid a = a_1x_1^2 + a_2x_2^2\}.$$

Struktura ta okazuje się być hiper-ciałem kodującym formy kwadratowe. Rzeczywiście klasyczne kryterium równoważności Witta, sformułowane przez Harrisona, autorzy E1 przeformułowują w terminach hiperciał. Pokazują mianowicie, że dla dowolnych ciał $E \sim F$ (" $\sim$ " oznacza, że ciała E i F mają izomorficzne pierścienie Witta) wtedy i tylko wtedy gdy hiperciała $Q(E)$ i $Q(F)$ są izomorficzne. Jest to eleganckie sformułowanie, które jak się okazuje ułatwia badanie równoważności Witta ciał.

Jeżeli w ciałach E i F dane są porządki to ciała równoważne w sensie Witta mają odpowiadające sobie porządki (cf. E3) Wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość nie zachodzi dla waluacji. Odpowiednie kontrprzykłady znajdują się w E3.

W pracy E1 autorzy uogólniają zasadę lokalno-globalną Perlisa, Szymiczka, Connera i Litherlanda (cf. E1 Twierdzenie 7.5). Rezultat ten mówi, że jeżeli ciała funkcyjne F i E nad ciałami globalnymi są równoważne w sensie Witta to odpowiadający im izomorfizm hiperciał $Q(F)$ i $Q(E)$ indukuje kanoniczną bijekcję pomiędzy zbiorami waluacji Abyankara ciał F i E, których ciała reszt nie są charakterystyki 2 ani nie sa skończone.

Rezultat ten uważam za głęboki. Jego dowód jest subtelny i technicznie zaawansowany.

W E1 podany jest również warunek dostateczny dla tego, zeby z równoważności Witta ciał funkcyjnych E i F nad ciałami liczbowymi k i l wynikała równoważność Witta ciał współczynników k i l.

W pracy E2 wyniki z pracy $E1$ uogólniane są na przypadek ciał funkcyjnych krzywych zdefiniowanych nad ciałami lokalnymi. Są to rezultaty analogiczne do tych z E1, jednakże nie są one prostym ich przeniesieniem i dlatego są interesujące.

W pracy E3 przedstawiono dowody niektórych klasycznych twierdzeń teorii form kwadratowych w nowym ujęciu wykorzystującym teorię hiperciał. Przedstawione dowody są prostsze od klasycznych. Przedstawione zostały również wyniki dotyczące równoważności Witta dla ciał funkcyjnych krzywych stożkowych. Twierdzenia 10.5, i 10.6 i 10.9 z E3 podają ciekawe teorio-liczbowe warunki wynikające z izomorfizmu hiperciał $Q(E)$ i $Q(F)$ w różnych sytuacjach dla cial funkcyjnych krzywych genusu zero.

Bardzo interesujące z punktu widzenia recenzenta byłoby rozpatrzenie sytuacji dla krzywych genusu 1. Krzywe eliptyczne nad ciałami liczbowymi jak wiadomo są niezwykle bogatym źródlem głębokich twierdzeń dotyczących ciał liczbowych. Recenzent rozumie, że wykładnik 3 przy jednej ze zmiennych wyraźnie zmienia sytuację, ale być może struktura grupowa grupy Mordella-Weila $E(F)$ krzywej eliptycznej E mogłaby pomóc w uzyskaniu interesujących twierdzeń dla ciał funkcyjnych krzywych eliptycznych. Interesujący jest również przypadek krzywych Fermata. Jak zmienia się hiperciało ciała funkcyjnego w zależności od ciała definicji krzywej (t.j. dla skończonych rozszerzeń ciała współczynników) jest osobnym interesującym pytaniem. Jestem przekonany, ze dr Gładki jest świadomy naturalności tego typu pytań i będą one przedmiotem jego dalszych badań.

Ad 2. Ta podgrupa prac O1-O3 dotyczy systematycznego badania struktur algebraicznych użytecznych w badaniu pierścieni Witta ciał. Badane są multipierścienie, hiperciała i porządki wyższych rzędów. Otrzymane wyniki mają charakter podstawowy i mogą być interesujące dla matematyków pracujących w innych niż teoria form kwadratowych dziedzinach matematyki.

W pracy O1 scharateryzowane zostały hiperciała formalnie rzeczywiste w terminach praporządków stopnia n (O1 Theorem1). Twierdzenie 2 z pracy O2 charakteryzuje praporządki właściwe hiperciała. Pojęcia praporządków i porządków dla hiper-ciał i multipierścieni odpowiadają pojęciom dla zwykłych ciał i pierścieni. Opisane zostały również formalnie n- rzeczywiste multipierścienie i otrzymane zostały twierdzenia charakteryzujące praporządki właściwe T stopnia n dla multipierścieni A spełniających warunek $A = T - T$. Praca O2 jest kontynuacją pracy O1. Otrzymane w niej rezultaty są z jednej strony pewnym uogólnieniem wyników z pracy O1, z drugiej strony przeformułowaniem ich w języku T-modułów. Praca O3 dotyczy pojęcia selekcji pierwiastków, które może być uważane jako uogólnienie porządków. Podgrupa R grupy $F^{\times}$ jest selekcją pierwiastków jeżeli dowolny element $a \in F^{\times}$ może być przedstawiony jednoznacznie w postaci $a = \omega r$, gdzie $r \in R$ oraz $\omega^2 = 1$. W pracy $O3$ zdefiniowane zostały selekcje i 2^p-selekcje pierwiastków dla hiperciał i udowodnione zostały podatawowe twierdzenia ich dotyczące.

Ad3. W tej grupie prac znajduje się jedna praca P1. Dotyczy ona aksjomatyzacji teorii Witta. Takie próby pojawiały się w pracach wielu wybitnych matematyków zajmujących się teorią form kwadratowych. Używają one jednak dość skomplikowanych pojęć takich jak schematy form kwadratowych, odwzorowania kwaternionowe, grupy spwcjalne czy silnie reprezentowalne pierścienie Witta. W pracy P1 autor podaje definicję częściowo przedstawialnego porządku oraz ciała kwadratowo przedstawialnego, definiuje dla nich formę kwadratową, pierścień Witta i pokazuje że ten skonstruowany przez niego pierścień Witta zbioru potęgowego kwadratowego hiperciała F jest izomorficzny z klasycznym pierścieniem Witta ciała F.

- Ocena osiągnięcia naukowego

Uważam, że wkład dra Pawła Gładkiego w teorię form kwadratowych jest istotny. Dr Paweł Gładki jest algebraikiem, który stara się do klasycznej teorii Witta form kwadratowych wprowadzać nowe elementy. Czyni to w sposób rozważny i systematyczny. Wyniki, które przedstawił nie są trywialne zasługują na miano osiągnięcia naukowego.

- Ocena pozostałego dorobku naukowego dra Pawła Gładkiego.

Oprócz prac przedstawionych jako osiągnięcie naukowe dr Paweł Gładki jest autorem 9 prac naukowych opublikowanych w bardzo dobrych czasopismach bądź wydawnictwach naukowych. Nie będę ich tu wszystkich streszczał. Recenzent uważa, że wyniki dotyczące tzw pp-conjecture dla przestrzeni porządków są znaczące. Również inne prace poświęcone badaniu przestrzeni porządków zasługują na uwagę. Dr Paweł Gładki prowadzi intensywną działalność naukową o zasięgu międzynarodowym. Był uczestnikiem wielu konferencji naukowych i seminariów na których wygłaszał wykłady. Był organizatorem trzech konferencji z serii *Algebra Logic and Number Theory*. Recenzuje prace naukowe w istotnych czasopismach dotyczących algebry. Odbył wiele staży w krajowych i zagranicznych ośrodkach naukowych. Dorobek dydaktyczny - promotor pomocniczy w doktoracie oraz fakt bycia promotorem wielu prac magisterskich jest wystarczający. W zakresie popularyzacji nauki dr P. Gładki udziela się jako juror *Ogólnopolskiego Sejmiku matematyków* oraz konkursu matematycznego *Epigramat*.

Konkluzja Moim zdaniem przedstawione osiągnięcie naukowe, dotychczasowa aktywność naukowa, dorobek dydaktyczny oraz w zakresie popularyzacji nauki spełniają ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane kandydatom w postępowaniu habilitacyjnym. Popieram wniosek dr P. Gładkiego o nadanie mu stopnia doktora habilitowanego w zakresie matematyki.

Piotr Krasoń

Piotr Krasoń