Prof. dr hab. Andrzej Nowicki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
w Toruniu

Toruń, 28 października 2019 r.

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym doktora Pawła Gładkiego

Przedstawione osiągnięcie naukowe pt.

Wybrane zastosowania hiperalgebr
w algebraicznej teorii form kwadratowych

składa się z siedmiu następujących prac:

[E1]. P. Gładki, M. Marshall, *Witt equivalence of function fields over global fields*, Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), 7861 7881.

[E2]. P. Gładki, M. Marshall, *Witt equivalence of function fields of curves over local fields*, Comm. Algebra 45 (2017), 5002 5013.

[E3]. P. Gładki, *Witt equivalence of fields: a survey with a special emphasis on applications of hyperfields* in: Ordered Algebraic Structures and Related Topics, 169 185, Contemp. Math. 697, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

[O1]. P. Gładki, *Orderings of higher level in multifields and multirings*, Ann. Math. Silesianae 24 (2010), 15 25.

[O2]. P. Gładki, M. Marshall, *Orderings and signatures of higher level on multirings and hyperfields*, J. K-theory 10 (2012), 489 518.

[O3]. P. Gładki, *Root selections and 2p-th root selections in hyperfields*, Discuss. Math., Gen. Algebra Appl., accepted.

[P1]. P. Gładki, K. Worytkiewicz, *Witt rings of quadratically presentable fields*, Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl., accepted.

Współautorem trzech prac [E1], [E2] oraz [02] jest kanadyjski matematyk **Murray Angus Marshall** (1940-2015), autor znanych książek i licznych prac o sumach kwadratów, porządkach, pierścieniach Witta, algebry i rzeczywistej geometrii algebraicznej. Profesor Marshall zmarł w maju 2015 roku.

Jest oświadczenie, że współautor ostatniej pracy [P1] ocenia swój udział procentowy na 50 procent. Dr Paweł Gładki, w *Wykazie opublikowanych prac naukowych ...*, informuje, że praca [E3] również powstała dzięki wsółpracy z Marshallem. Habilitant oświadcza, że jego udział procentowy w każdej wspólnej pracy (w tym również pracy [E3]) wynosi 50%.

ANow

Osiągnięcie naukowe dra Pawła Gładiego dotyczy algebraicznej teorii form kwadratowych. Głównym narzędziem stosowanym w tym osiągnięciu są hiperciała, wprowadzone w 1956 roku przez M. Krasnera w pracach o aproksymacjach ciał z waluacjami. Hiperciała zostały niezależnie wprowadzone przez Marshalla w 2006 roku i nazywane przez niego multiciałami. Marshall w 2006 roku, w pracy *Real reduced multirings and multifields* (J. Pure Appl Algebra 205(2)(2006), 452-468), w której zauważył, że w teorii form kwadratowych pojawiają się w naturalny sposób przykłady hiperciał.

W *Autoreferacie* Habilitant informuje, że ta praca, wraz zawartymi w niej otwartymi problemami, stała się główną motywacją do zajmowania się tą tematyką.

Dokładną definicję hiperciała znajdziemy w *Autoreferacie* oraz we wszytkich pracach stanowiących omawiane osiągnięcie naukowe. Wspomnijmy jednak, że są to systemy $(H, +, \cdot, -, 0, 1)$, w których H jest zbiorem, $\cdot : H \times H \to H$ i $- : H \to H$ są funkcjami, $0, 1$ są wyróżnionymi elementami zbioru H oraz $+$ jest wielowartościowym dodawaniem, tzn. funkcją z $H \times H$ do 2^H, i przy tym spełnione są pewne warunki. Jeden z tych warunków mówi, że system $(H, +, -, 0)$ ma być *kanoniczną hipergrupą*, wprowadzoną w 1969 roku przez J. Mitasa. Występują tu też *multipierścienie* i *hiperpierścienie*.

Istotną rolę w omawianych pracach odgrywają pierścienie Witta oraz relacja równoważności w sensie Witta dwóch nieosobliwych form kwadratowych. Jeśli F jest ciałem charakterystyki różnej od 2, to klasy równoważności w sensie Witta nieosobliwych form kwadratowych nad F tworzą pierścień przemienny z jedynką (dodawaniem jest suma ortogonalna form, a mnożeniem jest iloczyn tensorowy form). Pierścień ten jest nazywany *pieścieniem Witta* ciała F i oznaczany jest przez $W(F)$. W przypadku gdy ciało F ma charakterystykę równą 2, również definiuje się odpowiedni pierścień Witta $W(F)$. Dla danego ciała K oznacza się przez $G(K)$ jego kwadratowe hiperciało. Mówi się, że dwa dane ciała K i L są *równoważne w sensie Witta* jeśli pierścienie Witta $W(K)$ i $W(L)$ są izomorficzne. To jest również równoważne temu, że hiperciała $G(K)$ i $G(L)$ są izomorficzne.

Wiadomo, że każdy izomorfizm hiperciał zachowuje porządki. Wiadomo również, że jeśli K i L są globalnymi ciałami charakterystyki różnej od 2, to izomorfizm hiperciał $\gamma : G(K) \to G(L)$ sprawia, że istnieje bijekcja pomiędzy waluacjami ciała K i waluacjami ciała L. W ogólnym przypadku tak nie musi być (odpowiedni przykład znajdziemy w [E3]). W pracy [E1], otwierającej serię prac o równoważności Witta, autorzy dowodzą, że jeśli ciała funkcyjne K i L nad ciałami globalnymi są równoważne w sensie Witta, to izomorfizm kwadratowych hiperciał $G(K)$ i $G(L)$ indukuje w sposób kanoniczny bijekcję pomiędzy pewnego typu waluacjami ciał K i L; autorzy nazywają je *waluacjami Abhyankara*. Ten wynik jest ważny. Z niego wynikają intersujące twierdzenia, udowodnione w [E1], dotyczące ciał liczbowych.

Podobnego typu wynik jest w pracy [E2]. Tu autorzy zajmują sę ciałami funkcyjnymi krzywych zdefiniwanych nad ciałami lokalnymi. Dowodzą, że równoważność Witta dwóch ciał funkcyjnych jednej zmiennej, nad ciałami lokalnymi charakterystyki różnej od 2, indukuje kanoniczną bijekcję pomiędzy pewnymi podzbiorami zbioru waluacji Abhyankara odpowiednich ciał. Istotną rolę w omawianych pracach odgrywa teoria hi-

A Nov

perciał. Stosując tę teorię podano w pracy [E3], między innymi, nowe krótsze dowody znanych od dawna twierdzeń.

Rozwiązanie siedemnastego problemu Hilberta przez Artina i Schreiera w 1927 roku zapoczątkowało rozwój algebry rzeczywistej. Artin i Schreier pokazali, że istotne znaczenie mają ciała uporządkowane. Ich wyniki są do dziś stosowane i uogólniane na różne sposoby. Prace [O1], [O2] i [O3] są o multipieścienich. hiperciałach i porządkach wyższych stopni. Znajdziemy tu twierdzenia o porządkach i praporządkach stopnia n oraz o tak zwanych multipierścieniach i hiperciałach formalnie n-rzeczywistych. W ostatniej z tych prac, w pracy [O3], są twierdzenia dotyczące selekcji pierwiastków.

Trochę innego typu jest praca [P1], której współautorem jest K. Worytkiewicz. Autorzy proponują w niej pewien nowy sposób aksjomatyzowania form kwadratowych. Tutaj też pojawiają się kwadratowe hiperciała.

Dokładne omówienie wyników zawartych w niniejszym habilitacyjnym osiągnięciu naukowym wymaga wprowadzenia nowych definicji i oznaczeń. To samo dotyczy tych wyników Habilitanta, które nie wchodzą w skład rozprawy i opublikowane są w 9 pracach naukowych: [PP1], [PP2], [PP3], [PP4], [SO1], [SO2], [SO3], [SL1] i [FP1]. Dwie prace [PP4] i [FP1] są samodzielne. Współautorem 4 prac jest Marshall ([PP1], [PP2], [PP3], [SO3]). Współautorami pozostałych prac są B. Jacob ([SO1] i [SO2]) oraz K. Becher ([SL1]). Prace [PP1] - [PP4], dotyczące pp hipotezy w teorii przestrzeni porządków, zawierają wyniki z rozprawy doktorskiej Autora. W pracach [SO1], [SO2] i [SO3] badane są struktury przestrzeni porządków. W pracy [SL1] jest mowa o związkach między długością symboli i tak zwanym indeksem stabilności. W 2015 roku Katarzyna Kuhlmann i Franz-Viktor Kuhlmann udowodnili pewne twierdzenia o punkcie stałym dla przestrzeni kul. W krótkiej pracy [FP1] podano inne dowody tych twierdzeń.

Prezentowane wyniki opisane są szczegółowo w *Autoreferacie*. Autoreferat jest obszerny, liczy 38 stron. Sporo w nim różnych usterek i literówek. Zabawnie wygląda błędna równość $1 + (-1) = \{-1, 0, -1\}$, która - jak pisze Autor - pojawia się *już na etapie szkoły podstawowej* (strona 6; ta równość jest też w angielskiej wersji autoreferatu). W samej definicji hiperciała powinno znaleźć się jakieś dokładniejsze wyjaśnienie, dotyczące sensu równości $(a + b) + c = a + (a + b)$ dla $a, b, c \in H$, gdzie $+$ jest funkcją z $H \times H$ do 2^H.

Oczywiście wszystkie te potknięcia można szybko poprawić. Nie wpływają one na moją ogólną ocenę prezentowanej rozprawy habilitavyjnej

Większość prac, stanowiących rozprawę habilitacyjną oraz pozostałych prac (nie wchodzących w skład tej rozprawy), jest opublikowana w dobrych czasopismach matematycznych o zasięgu międzynarodowym. Są tu między innymi takie czasopisma jak: J. Algebra, J. Pure Appl. Algebra, Trans. Amer. Math. Soc., J. K-theory, Fund. Math., oraz Comm. Algebra.

W MathSciNet prace Autora są cytowane 27 razy przez 12 autorów. Odrzucając autocytowania ta pierwsza liczba jest bardzo mała. Mam jednak nadzieję, że w przyszłości tych cytowań będzie więcej.

ANo

Uważam, że omawiane wyniki są wartościowe i zasługują na uwagę.

Pan dr Paweł Gładki aktywnie uczestniczył w międzynarodowych i krajowych konferencjach naukowych. Wygłaszał referaty oraz miał liczne wykłady na zaproszenie i odczyty na różnych seminariach. Odbywało się to w wielu krajach: Polska, Austria, Belgia, Chile, Czechy, Francja, Irlandia, Kanada, Niemcy, Rosja, Słowenia, Szwajcaria, USA, Wielka Brytania.

Był członkiem organizacyjnym trzech konferencji naukowych (dwa razy w Będlewie i raz w Bukowinie Tatrzańskiej). Był promotorem 5 prac magisterskich i opiekunem 9 prac licencjackich (Uniwersytet Śląski i Akademia Górniczo-Hutnicza). Działalność Pana dr. Pawła Gładkiego we wszystkich wymienionych tu obszarach oceniam pozytywnie.

Uważam, że przedstawione osiągnięcia naukowe spełniają ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane w przewodach habilitacyjnych.

Popieram wniosek o nadanie Panu dr. Pawłowi Gładkiemu stopnia doktora habilitowanego.

Andrzej Nowicki