Załącznik Nr 3

# Autoreferat

1. Imię i nazwisko: **Szymon Żeberski**
2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:
   - dyplom magistra matematyki, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, 2000
   - stopień doktora matematyki, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, 2004
3. Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych:
   - asystent, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, 2004–2005,
   - adiunkt, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, 2005–2007,
   - adiunkt, Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska, 2007–2014,
   - adiunkt, Katedra Informatyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Politechnika Wrocławska, od 2014.
4. Osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi jednotematyczny cykl publikacji pod tytułem:

**Niemierzalność w przestrzeniach polskich**

## Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia


[H1] Sz. Żeberski, *On weakly measurable functions*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics, 53 (2005), 421-428,

[H2] Sz. Żeberski, *On completely nonmeasurable unions*, Mathematical Logic Quarterly, 53 (1) (2007), 38-42,

[H3] R. Rałowski, Sz. Żeberski, *Complete nonmeasurability in regular families*, Houston Journal of Mathematics, 34 (3) (2008), 773-780,

[H4] R. Rałowski, Sz. Żeberski, *On nonmeasurable images*, Czechoslovak Mathematical Journal, 60 (135) (2010), 424-434,

[H5] R. Rałowski, Sz. Żeberski, *Completely nonmeasurable unions*, Central European Journal of Mathematics, 8 (4) (2010), 683-687,

[H6] Sz. Żeberski, *Inscribing nonmeasurable sets*, Archives for Mathematical Logic, 50 (3) (2011), 423-430,

[H7] R. Rałowski, Sz. Żeberski, *Generalized Luzin sets*, Houston Journal of Mathematics, 39 (3) (2013), 983-993,

[H8] M. Michalski, Sz. Żeberski, *Some properties of I-Luzin sets*, Topology and its Applications, 189 (2015), 122-135.

## Omówienie celu naukowego i osiągniętych wyników na podstawie wyżej wymienionych prac

### Motywacja i opis dziedziny

Będziemy stosować standardową notację i terminologię teorio-teoriomnogościową.

Dla ustalonej nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej $T$ symbol $\mathcal{M}$ oznacza $\sigma$-ideał zbiorów pierwszej kategorii w $T$. Jeśli na $T$ zadana jest miara, to $\mathcal{N}$ oznacza $\sigma$-ideał zbiorów miary zero.

Jednym z pierwszych wyników dotyczących niemierzalnych sum podzbiorów prostej jest następujący rezultat K. Kuratowskiego z pracy [Ku].

**Twierdzenie 1** (Kuratowski)**.** *Załóżmy $CH$. Wtedy dla każdej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ parami rozłącznych zbiorów pierwszej kategorii takiej, że $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{M}$ istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma mnogościowa $\bigcup \mathcal{A}'$ nie ma własności Baire'a.*

Teza powyższego twierdzenia jest prawdziwa w $ZFC$, o czym mówi twierdzenie L. Bukowskiego z pracy [Bu].

**Twierdzenie 2** (Bukovsky)**.**
1. *Dla każdej partycji $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ prostej na zbiory pierwszej kategorii, istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma mnogościowa $\bigcup \mathcal{A}'$ nie ma własności Baire'a.*
2. *Dla każdej partycji $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ prostej na zbiory miary Lebesgue'a zero, istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma mnogościowa $\bigcup \mathcal{A}'$ nie jest mierzalna w sensie Lebesgue'a.*

W przeciwieństwie do dowodu twierdzenia Kuratowskiego, dowód przedstawiony przez Bukowskiego wykorzystywał nieelementarną metodę ultrapotęgi generycznej dla forsingu Cohena w przypadku zbiorów pierwszej kategorii oraz forsingu Solovay'a dodającego liczbę losową w przypadku miary.

Uogólnienie powyższego wyniku zostało uzyskane przez J. Brzuchowskiego, J. Cichonia, E. Grzegorka oraz Cz. Ryll-Nardzewskiego w pracy [BCGR].

Przypomnijmy, że dla $\sigma$-ideału $\mathcal{I} \subseteq P(T)$ rodzina $\mathcal{A}$ stanowi *bazę* $\mathcal{I}$ jeśli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ oraz $(\forall I \in \mathcal{I})(\exists A \in \mathcal{A})(I \subseteq I)$. Mówimy, że $\mathcal{I}$ ma *bazę borelowską* jeśli istnieje baza $\mathcal{I}$ składająca się ze zbiorów borelowskich. Analogicznie definiujemy analityczną bazę, ko-analityczną bazę oraz BP-bazę. W ostatnim przypadku wymagamy istnienia bazy składającej się ze zbiorów z własnością Baire'a.

**Twierdzenie 3** (Brzuchowski, Cichoń, Grzegorek, Ryll-Nardzewski)**.** *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest $\sigma$-ideałem na przestrzeni polskiej $T$ z bazą borelowską, zawierającym wszystkie zbiory jednoelementowe, to dla każdej rodziny punktowo-skończonej $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ (tzn. takiej, że $\forall x \in T$ $\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ jest skończony) takiej, że $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}$ istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, która nie jest $\mathcal{I}$-mierzalna tzn. nie należy do $\sigma$-ciała zbiorów generowanego przez $\sigma$-ideał $\mathcal{I}$ oraz $\sigma$-ciało wszystkich zbiorów borelowskich* $\mathrm{Bor}(T)$.

Dowód powyższego twierdzenia jest elementarny – wykorzystuje elementy klasycznej deskryptywnej teorii mnogości.

Ostatniego twierdzenia nie da się rozszerzyć na rodziny punktowo-przeliczalne $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$, to znaczy takie, dla których mamy

$$(\forall x \in T)\ (\{A \in \mathcal{A} :\ x \in A\} \text{ jest przeliczalny}).$$

Wynik ten został otrzymany przez D. Fremlina w pracy [Fr]. W modelu otrzymanym przez dodanie $\omega_2$ niezależnych liczb Cohena do modelu spełniającego $GCH$, skonstruował on przeliczalnie-punktowe pokrycie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ prostej zbiorami miary Lebesgue'a zero spełniające warunek "$\bigcup \mathcal{A}'$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a dla każdej podrodziny $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$". Analogiczny rezultat jest prawdziwy dla ideału zbiorów pierwszej kategorii. Wystarczy mianowicie dodać $\omega_2$ liczby Solovay'a do modelu spełniającego $GCH$.

**Definicja 1.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie $\sigma$-ideałem podzbiorów przestrzeni polskiej $T$. Załóżmy, że $\mathcal{I}$ ma bazę borelowską. Zbiór $A \subseteq T$ nazywamy*

(1) *$\mathcal{I}$-mierzalnym, jeśli $A$ należy do $\sigma$-ciała generowanego przez Bor borelowskie podzbiory przestrzeni $T$ oraz $\sigma$-ideał $\mathcal{I}$,*
(2) *$\mathcal{I}$-niemierzalnym, jeśli $A$ nie jest $\mathcal{I}$-mierzalny,*
(3) *całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym, jeśli dla każdego zbioru borelowskiego $B \notin \mathcal{I}$ przekrój $A \cap B$ jest $\mathcal{I}$-niemierzalny.*

W przypadku, gdy $\mathcal{I}$ jest $\sigma$-ideałem zbiorów przeliczalnych, $A$ jest $\mathcal{I}$-niemierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest zbiorem borelowskim oraz $A$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy $A$ jest zbiorem Bernsteina.

W przypadku, gdy przestrzeń $T$ jest odcinkiem $[0,1]$, a $\mathcal{I} = \mathcal{N}$ jest $\sigma$-ideałem zbiorów miary Lebesgue'a zero, zbiór $A$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego miara wewnętrzna jest równa 0 oraz miara zewnętrzna jest równa 1.

Jednym z kierunków badań nad niemierzalnymi zbiorami jest próba weryfikacji następującej hipotezy:

**Hipoteza 1.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie $\sigma$-ideałem podzbiorów przestrzeni polskiej $T$. Załóżmy, że $\mathcal{I}$ ma bazę borelowską. Niech $\mathcal{A}$ będzie punktowo-skończonym pokryciem $T$ zbiorami z $\mathcal{I}$. Wówczas istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, dla której $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna.*

W szczególnym przypadku, gdy $\mathcal{I} = \mathcal{N}$, do tej pory nie wiadomo, czy z każdej partycji odcinka $[0,1]$ na zbiory miary Lebesgue'a zero można wybrać podrodzinę, której suma jest całkowicie niemierzalna, tzn. ma miarę wewnętrzną 0 i miarę zewnętrzną 1. Częściowy wynik został uzyskany przez D. Fremlina i S. Todorcevića (patrz [FT]).

**Twierdzenie 4** (Fremlin, Todorcević)**.** *Z dowolnej partycji odcinka $[0,1]$ na zbiory miary 0 oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można wybrać podrodzinę, której suma ma miarę wewnętrzną mniejszą niż $\varepsilon$ oraz miarę zewnętrzną większą niż $1-\varepsilon$.*

Inspiracji do kolejnych potencjalnych uogólnień dostarcza następujący rezultat M. Gitika i S. Shelaha z pracy [GS2].

**Twierdzenie 5** (Gitik, Shelah)**.** *Niech $(A_n)_{n\in\omega}$ będzie dowolnym ciągiem podzbiorów prostej $\mathbb{R}$. Wtedy istnieje ciąg $(B_n)_{n\in\omega}$ czyniący zadość warunkom*

(1) *dla każdego $n$, $B_n \subseteq A_n$,*
(2) *$n \neq m$ implikuje, że $B_n \cap B_m = \emptyset$,*
(3) *dla każdego $n$, $\lambda^*(A_n) = \lambda^*(B_n)$,*

*gdzie $\lambda^*$ oznacza miarę zewnętrzną Lebesgue'a.*

Dowód powyższego twierdzenia wykorzystuje metodę ultrapotęgi generycznej. Opiera się na pokazaniu, że algebra Boole'a postaci $P(\kappa)/I$ nie może być postaci $Cohen \times Random$ (ani $Random \times Cohen$).

Zauważmy, że twierdzenie 5 jest naturalnym uogólnieniem klasycznego wyniku Łuzina, że każdy podzbiór prostej można podzielić na dwa zbiory o mierze zewnętrznej takiej jak wyjściowy zbiór.

W pracy [CK] J. Cichoń oraz A. Kharazishvili pokazali szereg zastosowań twierdzeń o istnieniu podrodzin o niemierzalnych sumach.

Niech $\mathcal{X}$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Funkcję $f : T \to \mathcal{X}$ nazywamy *$Bor[\mathcal{I}]$-mierzalną* jeśli dla dowolnego zbioru otwartego $U$ przeciwobraz $f^{-1}[U]$ należy do $\sigma$-ciała generowanego przez borelowskie podzbiory przestrzeni $T$ oraz $\sigma$-ideał $\mathcal{I}$.

**Twierdzenie 6** (Cichoń, Kharazishvili)**.** *Niech $E$ będzie przestrzenią metryczną oraz $f : T \to E$ będzie funkcją $Bor[\mathcal{I}]$-mierzalną. Wtedy istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{I}$, że $f[T \setminus A]$ jest przestrzenią ośrodkową.*

Naturalnym wnioskiem z tego twierdzenia (dla ideału $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$) jest klasyczne twierdzenie Frolika.

**Twierdzenie 7** (Frolik)**.** *Niech $E$ będzie przestrzenią metryczną oraz $f : T \to E$ będzie funkcją borelowską. Wtedy $rng(f)$ jest przestrzenią ośrodkową.*

**Twierdzenie 8** (Cichoń, Kharazishvili)**.** *Niech $E$ będzie grupą metryczną oraz $f, g : T \to E$ będą funkcjami $Bor[\mathcal{I}]$-mierzalnymi. Wtedy $f + g$ jest funkcją $Bor[\mathcal{I}]$-mierzalną.*

Szczególnym przypadkiem sum mnogościowych zbiorów są sumy algebraiczne zdefiniowane na abelowej grupie $(G, +)$. Niech $A, B \in \mathscr{P}(G)$ będą dowolnymi podzbiorami zadanej grupy. Wtedy sumę algebraiczną $A + B$ definiujemy następująco:

$$A + B = \{a + b \in G : \ (a, b) \in A \times B\}.$$

W. Sierpiński [Si1] udowodnił, że istnieją dwa podzbiory $X$, $Y$ prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, których suma algebraiczna $X + Y$ nie jest mierzalna w sensie Lebesgue'a.

Wynik ten został wzmocniony przez M. Kysiaka w pracy [Ky] o niemierzalnych algebraicznych sumach. Udowodnił on następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 9** (Kysiak)**.** *Załóżmy, że $\sigma$-ideał $\mathcal{I}$ na prostej rzeczywistej zawiera wszystkie singletony oraz para $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ ma własność zbioru doskonałego. (Para $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ ma własność zbioru doskonałego, jeśli każdy zbiór $B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ zawiera zbiór doskonały.) Wtedy dla dowolnego podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ spełniającego warunek $A + A \notin \mathcal{I}$ istnieje $X \subseteq A$, dla którego $X + X \notin \mathcal{A}$.*

Przykładami par, które mają własność zbioru doskonałego są $(\mathcal{N}, \mathcal{LM})$ oraz $(\mathcal{M}, \mathcal{BP})$ (tutaj $\mathcal{LM}$ oznacza $\sigma$-algebrę wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, $\mathcal{BP}$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$ posiadających własność Baire'a). Jako wniosek otrzymujemy twierdzenie Ciesielskiego, Fejzicia, Freilinga [CFF], które mówi że, jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest takim podzbiorem $\mathbb{R}$, dla którego $A + A$ posiada dodatnią miarę zewnętrzną, to istnieje taki zbiór $X \subseteq A$, że $X + X$ jest niemierzalny. Własność zbioru doskonałego pary $(\mathcal{M}, \mathcal{BP})$ implikuje analogiczne twierdzenie dla $\sigma$-ideału zbiorów pierwszej kategorii $\mathcal{M}$. W pracy [CFF] znajdujemy też następujące twierdzenie: jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest taki, że $A + A \notin \mathcal{N}$, to istnieje taki jego podzbiór miary zero $X \subseteq A$, że $X + X$ jest niemierzalny. Analogiczne twierdzenie zachodzi w przypadku kategorii.

W badaniach nad podrodzinami podzbiorów przestrzeni polskiej, w szczególności w badaniach $\sigma$-ideałów, przydatne okazują się tzw. współczynniki kardynalne. Dla zadanej rodziny

$\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ podzbiorów przestrzeni polskiej $X$, definiujemy je w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
\mathrm{add}(\mathcal{F}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \ \wedge \ \bigcup\mathcal{A} \notin \mathcal{F}\},\\
\mathrm{non}(\mathcal{F}) &= \min\{|A| : A \subseteq X \ \wedge \ A \notin \mathcal{F}\},\\
\mathrm{cov}(\mathcal{F}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \wedge \bigcup\mathcal{A} = X\},\\
\mathrm{cov}_h(\mathcal{F}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \wedge (\exists B \in Bor(X) \setminus \mathcal{F})\ B \subseteq \bigcup \mathcal{A}\},\\
\mathrm{cof}(\mathcal{F}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \ \wedge \ (\forall B \in \mathcal{F})(\exists A \in \mathcal{A}) \ \ B \subseteq A\}.
\end{aligned}$$

Ponadto, następujące dwie liczby kardynalne opisujące najmniejszą moc nieograniczonej i dominującej rodziny (odpowiednio) na przestrzeni Baire'a

$$\mathfrak{b} = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \omega^\omega \wedge (\forall x \in \omega^\omega)(\exists y \in \mathcal{B})\ \neg(y \leq^* x)\}$$

$$\mathfrak{d} = \min\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq \omega^\omega \wedge (\forall x \in \omega^\omega)(\exists y \in \mathcal{D})\ x \leq^* y\}$$

(gdzie $f \leq^* g$ oznacza, że $(\exists m \in \omega)(\forall n \geq m) f(n) \leq g(n))$, są powiązane z poprzednimi współczynnikami dla $\sigma$-ideału zbiorów pierwszej kategorii Baire'a, co opisuje tak zwany *diagram Cichonia* (patrz [BJS]).

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\omega_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

W badania zbiorów niemierzalnych pojawiają się pewne specjalne zbiory, tak zwane zbiory Łuzina i zbiory Sierpińskiego. Zostały one wprowadzone w pracach [Lu], [Si2].

**Definicja 2.** *Zbiór $A \subseteq T$ nazywamy*

(1) *zbiorem Łuzina, jeśli $A$ jest nieprzeliczalny oraz przekrój $A \cap M$ jest przeliczalny dla dowolnego zbioru pierwszej kategorii $M \in \mathcal{M}$,*
(2) *zbiorem Sierpińskiego, jeśli $A$ jest nieprzeliczalny oraz przekrój $A \cap N$ jest przeliczalny dla dowolnego zbioru miary zero $N \in \mathcal{N}$.*

Istnienie zbioru Łuzina (zbioru Sierpińskiego) jest niezależne od teorii mnogości $ZFC$. Przy założeniu $CH$ zbiory powyższe istnieją, natomiast przy założeniu $MA + \neg CH$ nie istnieją.

W pracy [Sch] M. Scheepers podał charakteryzację zbiorów Łuzina w terminach własności pokryciowych (podobnych do własności Rothbergera).

Pojęcie zbioru Łuzina można w naturalny sposób uogólnić zamieniając ideał zbiorów pierwszej kategorii $\mathcal{M}$ na dowolny inny ideał podzbiorów przestrzeni $T$.

W pracy T. Bartoszyńskiego i L. Halbeisena rozważano $\mathcal{K}$-zbiory Łuzina, gdzie $\mathcal{K}$ jest $\sigma$-ideałem generowanym przez zwarte podzbiory przestrzeni Baire'a $\omega^\omega$. Autorzy pokazali, że istnienie $\mathcal{K}$-zbioru Łuzina mocy $\mathfrak{c}$ jest równoważne twierdzeniu Banacha-Kuratowskiego o macierzach podzbiorów odcinka $[0, 1]$ (patrz [BH]).

Rozważano także uogólnione zbiory Łuzina. Przypomnijmy, że $A \subseteq T$ jest *uogólnionym zbiorem Łuzina*, jeśli dla dowolnego zbioru pierwszej kategorii $M \in \mathcal{M}$ mamy $|M \cap A| < |A|$. Uogólnione zbiory Łuzina były badane między innymi przez L. Bukovskiego w [Buk]. Również w tym przypadku można ideał zbiorów pierwszej kategorii $\mathcal{M}$ zastąpić dowolnym ideałem $\mathcal{I}$ otrzymując pojęcie *uogólnionego zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina*.

## Opis osiągnięcia naukowego

**Sumy mnogościowe zbiorów.** Przedstawimy wyniki stanowiące częściowe rozwiązania problemu: czy z dowolnej punktowo-skończonej rodziny zbiorów z $\sigma$-ideału $\mathcal{I}$ można wybrać podrodzinę, której suma jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna. Ograniczymy się do $\sigma$-ideałów $\mathcal{I}$ mających *własność Suslina* (zwanych także c.c.c. ideałami), tzn. takich, dla których dowolna rodzina parami rozłącznych zbiorów borelowskich spoza $\mathcal{I}$ jest przeliczalna. Przykładami takich $\sigma$-ideałów są $\mathcal{N}$ oraz $\mathcal{M}$. $\sigma$-ideał z własnością Suslina ma *własność otoczki*. Oznacza to, że dla dowolnego podzbioru $X$ przestrzeni $T$ istnieje najmniejszy (z dokładnością do zbioru z ideału $\mathcal{I}$) zbiór $\mathcal{I}$-mierzalny zawierający $X$ (z dokładnością do zbioru z $\mathcal{I}$). Przez $[X]_{\mathcal{I}}$ oznaczać będziemy element algebry Boole'a $\mathcal{B}[\mathcal{I}]/\mathcal{I}$ reprezentujący klasę wszystkich minimalnych $\mathcal{I}$-mierzalnych podzbiorów $T$ zawierających $X$ z dokładnością do zbioru z $\mathcal{I}$.

Przyjmiemy ponadto dodatkowe założenie teoriomnogościowe o nieistnieniu pewnych dużych liczb kardynalnych mniejszych niż $\mathfrak{c}$.

Przytoczymy teraz definicję pochodzącą od D. Fremlina (patrz [Fre]).

**Definicja 3.** *Nieprzeliczalną regularną liczbę kardynalną $\kappa$ nazywamy quasi-mierzalną, jeśli istnieje taki $\sigma$-ideał $\mathcal{J} \subseteq P(\kappa)$, że algebra Boole'a $P(\kappa)/\mathcal{J}$ spełnia warunek c.c.c., tzn. dowolna kolekcja parami rozłącznych elementów tej algebry jest przeliczalna.*

Zauważmy, że jeśli $\kappa$ jest liczbą mierzalną, lub słabiej, rzeczywiście mierzalną, to $\kappa$ jest quasi-mierzalna. Z drugiej strony, macierz Ulama gwarantuje nam, że każda quasi-mierzalna liczba jest liczbą słabo-nieosiągalną. Liczby quasi-mierzalne są zatem tzw. dużymi liczbami kardynalnymi.

Wprowadźmy naturalne uogólnienie pojęcia całkowitej $\mathcal{I}$-niemierzalności, które zależy dodatkowo od ustalonego podzbioru $X$ przestrzeni $T$.

**Definicja 4.** *Niech $T$ będzie nieprzeliczalną przestrzenią polską, $\mathcal{I}$ – $\sigma$-ideałem podzbiorów $T$ mającym borelowską bazę. Ustalmy $X \notin \mathcal{I}$. Powiemy, że $A \subseteq X$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny w $X$, jeśli*

$$(\forall B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{I})(B \cap X \notin \mathcal{I} \Rightarrow (A \cap B \notin \mathcal{I}) \wedge (A \cap (X \setminus B) \notin \mathcal{I})).$$

**Twierdzenie 10** ([H2], Theorem 3.6)**.** *Załóżmy, że nie istnieje quasi-mierzalna liczba $\kappa \leq \mathfrak{c}$. Niech $T$ będzie nieprzeliczalną przestrzenią polską, $\mathcal{I}$ – $\sigma$-ideałem podzbiorów $T$, który ma borelowską bazę oraz własność Suslina. Wtedy dla dowolnej punktowo-skończonej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$, której suma nie należy do $\mathcal{I}$ znajdziemy taką podrodzinę $\mathcal{A}'$, że $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna w $\bigcup \mathcal{A}$.*

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na następujących trzech lematach (stosujemy w nich założenia twierdzenia 10).

**Lemat 1** ([H2], Theorem 3.3)**.** *Niech $\{A_\xi : \xi \in \omega_1\}$ będzie dowolną rodziną podzbiorów przestrzeni $T$. Wtedy istnieje rodzina $\{I_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ parami rozłącznych podzbiorów $\omega_1$ spełniająca dla dowolnych $\alpha, \beta \in \omega_1$ warunek $\left[\bigcup_{\xi \in I_\alpha} A_\xi\right]_{\mathcal{I}} = \left[\bigcup_{\xi \in I_\beta} A_\xi\right]_{\mathcal{I}}$.*

**Lemat 2** ([H2], Lemma 3.4)**.** *Istnieje kolokcja rodzin $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ dla $\alpha \in \omega_1$ spełniająca warunki*

(1) $\bigcup \mathcal{A}_\alpha \notin \mathcal{I}$,

(2) $\alpha \neq \beta$ *implikuje* $\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_\beta = \emptyset$,
(3) $[\bigcup \mathcal{A}_\alpha]_\mathcal{I} = [\bigcup \mathcal{A}_\beta]_\mathcal{I}$.

**Lemat 3** ([H2], Lemma 3.5)**.** *Niech $\mathcal{C}$ będzie dowolną punktowo-skończoną rodziną podzbiorów przestrzeni $T$. Wtedy istnieje taka podrodzina $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, że zbiór $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$ jest przeliczalny oraz*

$$(\forall B \in Bor \setminus \mathcal{I})(\forall C \in \mathcal{C}')(B \cap \bigcup \mathcal{C} \notin \mathcal{I} \Rightarrow \neg(B \cap \bigcup \mathcal{C} \subseteq B \cap C)).$$

Twierdzenie 10 zostało wzmocnione w pracy [H5] (napisanej wspólnie z R. Rałowskim). Założenia twierdzenia osłabiono do postaci "nie istnieje quasi-mierzalna liczba $\kappa < \mathfrak{c}$". Teza również została nieco osłabiona.

**Twierdzenie 11** ([H5], Theorem 1.3)**.** *Załóżmy, że nie istnieje quasi-mierzalna liczba $\kappa < \mathfrak{c}$. Niech $T$ będzie nieprzeliczalną przestrzenią polską, $\mathcal{I}$ – $\sigma$-ideałem podzbiorów $T$, który ma borelowską bazę oraz własność Suslina. Wtedy dla dowolnego punktowo-skończonego pokrycia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ przestrzeni $T$ znajdziemy taką podrodzinę $\mathcal{A}'$, że $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna.*

Dowód powyższego twierdzenia poza lematami 1, 2, 3 wykorzystuje dwa pomocnicze twierdzenia.

**Twierdzenie 12** ([H5], Theorem 2.1)**.** *Załóżmy, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ jest takim pokryciem przestrzeni $T$, że dla dowolnego zbioru $D \subseteq T$ mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$ suma $\bigcup_{x\in D} \bigcup \mathcal{A}(x)$ nie zawiera żadnego zbioru borelowskiego spoza $\mathcal{I}$. (Zbiór $\mathcal{A}(x)$ oznacza kolekcję wszystkich elementów rodziny $\mathcal{A}$, do których należy $x$, czyli $\mathcal{A}(x) = \{A \in \mathcal{A} : \ x \in A\}$.) Wtedy $\mathcal{A}$ zawiera parami rozłączne rodziny $\mathcal{A}_\xi$ dla $\xi < \mathfrak{c}$, dla których $\bigcup \mathcal{A}_\xi$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym.*

**Twierdzenie 13** ([H5], Theorem 2.2)**.** *Załóżmy, że nie istnieje quasi-mierzalna liczba $\kappa < \mathfrak{c}$. Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ będzie taką rodziną, że dla dowolnego $x$ zbiór $\mathcal{A}(x)$ ma moc mniejszą niż $\mathfrak{c}$. Jeśli $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}$, to można znaleźć nieprzeliczalną kolekcję podrodzin $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}$, $\alpha \in \omega_1$ spełniającą warunki $\bigcup \mathcal{A}_\alpha \notin \mathcal{I}$ oraz $\bigcup \mathcal{A}_\alpha \cap \bigcup \mathcal{A}_\beta \in \mathcal{I}$ dla $\alpha \neq \beta$.*

Zajmiemy się teraz uogólnieniami twierdzenia 5 dotyczącymi wpisywania zbiorów niemierzalnych w zadane zbiory (rodziny zbiorów).

**Twierdzenie 14** ([H6], Theorem 3.2)**.** *Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną parami rozłącznych podzbiorów przestrzeni $T$ składającą się ze zbiorów pierwszej kategorii. Załóżmy, że $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{M}$. Dla $n \in \omega$ ustalmy dowolne $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$. Wtedy istnieje podrodzina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ czyniąca zadość warunkom:*

(1) $\bigcup \mathcal{B} \notin \mathcal{M}$,
(2) *dla dowolnego $n \in \omega$ zbiór $\bigcup \mathcal{B} \cap \bigcup \mathcal{A}_n$ nie zawiera żadnego $\mathcal{M}$-pozytywnego zbioru borelowskiego modulo $\bigcup \mathcal{A}_n$, tzn.*

$$(\forall n)(\neg \exists U)(U \textit{ jest otwarty } \wedge U \cap \bigcup \mathcal{A}_n \notin \mathcal{M} \wedge U \cap \bigcup \mathcal{A}_n \setminus \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{M}).$$

Dowód powyższego twierdzenia polega na sprowadzeniu do sprzeczności przypuszczenia o istnieniu rodziny $\mathcal{A}$ nie spełniającej tezy twierdzenia. Używając tej rodziny, konstruujemy algebrę Boole'a postaci $P(\kappa)/\mathcal{I}$. Następnie pokazujemy, że owa algebra jest bezatomowa i ma przeliczalny podzbiór gęsty. Oznacza to, że jest to jedyna (z dokładnością do izomorfizmu) taka algebra, czyli algebra Cohena. Na mocy wyniku Gitika i Shelaha (patrz [GS1]) jest to niemożliwe.

**Twierdzenie 15** ([H6], Theorem 3.6)**.** *Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ będzie rodziną parami rozłącznych podzbiorów przestrzeni $T$. Załóżmy, że $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{M}$. Dla $n \in \omega$ ustalmy dowolne $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$. Wtedy istnieje podrodzina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ czyniąca zadość warunkom:*

(1) $[\bigcup \mathcal{B}]_{\mathcal{M}} = [\bigcup \mathcal{A}]_{\mathcal{M}}$,
(2) *dla dowolnego* $n \in \omega$ *zbiór* $\bigcup \mathcal{B} \cap \bigcup \mathcal{A}_n$ *nie zawiera żadnego* $\mathcal{M}$*-pozytywnego zbioru borelowskiego modulo* $\bigcup \mathcal{A}_n$.

Dowód powyższego twierdzenia wykorzystuje twierdzenie 14. W pierwszym kroku przestrzeń $\bigcup \mathcal{A}$ jest rozbijana na dwie podprzestrzenie. Pierwsza podprzestrzeń składa się z fragmentów, na których algebry Boole'a spełniają własność Suslina. Druga - dziedzicznie tej własności nie ma. Konstrukcję przeprowadzamy najpierw w drugiej podprzestrzeni. Stosujemy tam twierdzenie Erdősa-Alaoglu, a właściwie jego wersję wynikającą z dowodu z pracy Taylora [Ta]. Następnie, w analizie "podprzestrzeni c.c.c", wykorzystujemy twierdzenie 14, budując szukaną rodzinę przez indukcję pozaskończoną. Warunek Suslina zapewnia nam zakończenie konstrukcji na kroku $< \omega_1$.

Następne twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia 5 z pracy [GS2] dla przypadku ideału zbiorów pierwszej kategorii oraz jednocześnie uogólnieniem twierdzenia 52 z pracy [P3] o znajdowaniu podrodziny o całkowicie $\mathcal{M}$-niemierzalnej sumie w wyjściowej partycji na zbiory pierwszej kategorii.

**Twierdzenie 16** ([H6], Theorem 3.7)**.** *Załóżmy, że* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ *jest partycją przestrzeni* $T$. *Niech* $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ *dla* $n \in \omega$. *Wtedy istnieją podrodziny* $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n$ *spełniające warunki*
(1) $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_m = \emptyset$ *dla* $n \neq m$,
(2) $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n$,
(3) $[\bigcup \mathcal{A}_n]_{\mathcal{M}} = [\bigcup \mathcal{B}_n]_{\mathcal{M}}$.

Przejdźmy teraz do zagadnienia wpisywania podrodzin dla dowolnych $\sigma$-ideałów z własnością Suslina. Przytoczymy teraz pomocniczy lemat.

**Twierdzenie 17** ([H6], Lemma 4.3)**.** *Załóżmy, że nie istnieje liczba quasi-mierzalna mniejsza niż continuum. Niech* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ *będzie punktowo-skończoną rodziną. Niech* $(\mathcal{A}_n : n \in \omega)$ *będzie ciągiem podzbiorów* $\mathcal{A}$. *Wtedy znajdziemy ciąg* $(\mathcal{B}_n : n \in \omega)$ *spełniający warunki:*
(1) $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_m = \emptyset$ *dla* $n \neq m$,
(2) $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n$,
(3) $[\bigcup \mathcal{A}_n]_{\mathcal{I}} = [\bigcup \mathcal{B}_n]_{\mathcal{I}}$.

Ostatnie twierdzenia uogólnia w pewnym sensie twierdzenie 10. Metody używane do dowodów obu twierdzeń są podobne.

Przy poprzednich założeniach tezę powyższego twierdzenia można wzmocnić wpisując nieprzeliczalnie wiele rodzin w każdą z rodzin $\mathcal{A}_n$. Precyzyjnie wysławia to następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 18** ([H6], Theorem 4.4)**.** *Załóżmy, że nie istnieje liczba quasi-mierzalna mniejsza niż continuum. Niech* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ *będzie punktowo-skończoną rodziną. Niech* $(\mathcal{A}_n : n \in \omega)$ *będzie ciągiem podzbiorów* $\mathcal{A}$. *Wtedy znajdziemy ciąg* $(\mathcal{B}_n^\xi : n \in \omega, \xi \in \omega_1)$ *spełniający warunki:*
(1) $\mathcal{B}_n^\xi \cap \mathcal{B}_m^\eta = \emptyset$ *dla* $(n,\xi) \neq (m,\eta)$,
(2) $\mathcal{B}_n^\xi \subseteq \mathcal{A}_n$,
(3) $[\bigcup \mathcal{A}_n]_{\mathcal{I}} = [\bigcup \mathcal{B}_n^\xi]_{\mathcal{I}}$.

Przedstawimy teraz wyniki dotyczące niemierzalnych sum wybieranych z rodzin o pewnych dodatkowych własnościach.

Przytoczmy pomocnicze definicje.

**Definicja 5.** *Niech $\mathcal{A}$ będzie pewną algebrą podzbiorów $X$. Niech $F : X \to Y$ będzie multifunkcją, tzn. $F \subseteq X \times Y$. Powiemy, że multifunkcja $F$ jest $\mathcal{A}$-mierzalna, jeśli dla dowolnego otwartego podzbioru $U$ przestrzeni $Y$ zbiór*

$$F^{-1}[U] = \{x \in X : \ F_x \cap U \neq \emptyset\}$$

*należy do rodziny $\mathcal{A}$.*

**Definicja 6.** *Niech $\mathcal{P}$ będzie partycją zbioru $X$.*

(1) *Nasyceniem zbioru $A \subseteq X$ nazywamy zbiór $A^* = \bigcup\{E \in \mathcal{P} : \ E \cap A \neq \emptyset\}$.*
(2) *Partycję $\mathcal{P}$ nazywamy borelowsko mierzalną, jeśli nasycenie dowolnego zbioru otwartego jest borelowskie.*
(3) *Partycję $\mathcal{P}$ nazywamy silnie borelowsko mierzalną, jeśli nasycenie dowolnego zbioru domkniętego jest borelowskie.*

Zauważmy, że dla przestrzeni spełniających drugi aksjomat przeliczalności silna borelowska mierzalność pociąga borelowską mierzalność partycji.

**Twierdzenie 19** ([H3], Theorem 2.1). *Załóżmy, że dowolny zbiór borelowski spoza ideału $\mathcal{I}$ zawiera domknięty zbiór spoza $\mathcal{I}$. Niech $\mathcal{A}$ będzie silnie borelowsko mierzalną partycją przestrzeni $T$ na domknięte zbiory z $\mathcal{I}$. Wtedy istnieje taka podrodzina $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, że $\bigcup \mathcal{A}_0$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna.*

Jako wniosek otrzymujemy następujący rezultat.

**Wniosek 1** ([H3], Corollary 3.2). *Niech $G$ będzie abelową zwartą grupą polską. Załóżmy, że $\sigma$-ideał $\mathcal{I}$ jest zamknięty na przesunięcia. Załóżmy, że każdy borelowski zbiór spoza $\mathcal{I}$ zawiera domknięty zbiór spoza $\mathcal{I}$. Niech $H < G$ będzie doskonałą podgrupą oraz $H \in \mathcal{I}$. Wtedy istnieje taki $T \subseteq G$, że $T + H$ jest całkowicie $\mathcal{I}$–niemierzalny w $G$.*

**Twierdzenie 20** ([H3], Theorem 2.2). *Niech $f : X \to Y$ będzie borelowską funkcją o własności $f^{-1}(y) \in \mathcal{I}$ dla każdego $y \in Y$. Wtedy istnieje taki $T \subseteq Y$, że $f^{-1}[T]$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny.*

**Twierdzenie 21** ([H3], Theorem 2.3). *Załóżmy, że $\sigma$-ideał $\mathcal{I}$ spełnia warunek Suslina. Niech $F : X \to Y$ będzie borelowsko mierzalną multifunkcją spełniającą warunek $F(x)$ jest skończony dla każdego $x \in X$. Wtedy istnieje taki $T \subseteq Y$, że $F^{-1}[T]$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny.*

Dowód powyższego twierdzenia wykorzystuje twierdzenie Kuratowskiego, Ryll-Nardzewskiego o selektorze z pracy [KR].

**Twierdzenie 22** ([H3], Theorem 2.4). *Załóżmy, że $\sigma$-ideał $\mathcal{I}$ spełnia warunek Suslina. Niech $F \subseteq X \times Y$ będzie zbiorem analitycznym spełniającym warunki:*

(1) $(\forall y \in Y)(F^y \in \mathcal{I})$,
(2) $X \setminus \pi[F] \in \mathcal{I}$, *gdzie $\pi : X \times Y \to X$ jest rzutem na pierwszą oś,*
(3) $(\forall x \in X)(|F_x| < \omega)$.

*Wtedy istnieje taki zbiór $T \subseteq Y$, że $F^{-1}[T]$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny.*

**Zastosowania.** W tym podrozdziale $T$ oznacza nieprzeliczalną przestrzeń polską.

**Definicja 7.** *Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią topologiczną. Powiemy, że funkcja $f : T \to \mathcal{X}$ jest słabo mierzalna w sensie Baire'a, jeśli dla dowolnych $U$, $V$ otwartych rozłącznych podzbiorów $\mathcal{X}$ spełniony jest warunek:*

$$f^{-1}[U] \notin \mathcal{M} \wedge f^{-1}[V] \notin \mathcal{M} \Longrightarrow \left[f^{-1}[U]\right]_{\mathcal{M}} \neq \left[f^{-1}[V]\right]_{\mathcal{M}}.$$

Klasa funkcji słabo mierzalnych w sensie Baire'a rozszerza klasę funkcji mierzalnych w sensie Baire'a.

Następne twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia Banacha o sumie zbiorów otwartych pierwszej kategorii na kontekst związany z funkcjami słabo mierzalnymi w sensie Baire'a.

**Twierdzenie 23** ([H1], Theorem 3.6). *Załóżmy, że $\mathcal{X}$ jest przestrzenią metryzowalną. Niech $f : T \to \mathcal{X}$ będzie funkcją słabo mierzalną w sensie Baire'a. Rozważmy rodzinę*

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}[U] : \ U \text{ jest otwarty w } \mathcal{X} \text{ oraz } f^{-1}[U] \in \mathcal{M}\}.$$

*Wtedy $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{M}$.*

Istotnym narzędziem w dowodzie powyższego twierdzenia jest twierdzenie 52 o całkowicie $\mathcal{M}$-niemierzalnych sumach.

**Twierdzenie 24** ([H1], Theorem 3.8). *Załóżmy, że $\mathcal{X}$ jest przestrzenią metryzowalną. Niech $f : T \to \mathcal{X}$ będzie funkcją słabo mierzalną w sensie Baire'a. Wtedy istnieje taki zbiór $M \in \mathcal{M}$, że $f[T \setminus M]$ jest przestrzenią ośrodkową.*

W dowodzie wykorzystywane jest twierdzenie Kowalskiego mówiące, że każda metryzowalna przestrzeń jest homeomorficzna z podprzestrzenią pewnej przestrzeni jeża (ang. hedgehog space).

Przejdźmy teraz do sytuacji, w której przestrzeń $\mathcal{X}$ nie jest metryzowalna. Nie należy tu oczekiwać negatywnych rezultatów w teorii ZFC. Przy pewnych założeniach teoriomnogościowych twierdzenia o istnieniu niemierzalnej podsumy mogą mieć bardzo słabe założenia.

Skoncentrujemy się zatem na konkretnym modelu. Rozważymy rozszerzenie uniwersum konstruowalnego przez dodanie $\omega_2$ liczb Soloway'a.

**Lemat 4** ([H1], Claim 4.1). *W modelu $L^{Random(\omega_2)}[G]$ istnieje ciąg $(K^\alpha)_{\alpha\in\omega_2}$ zbiorów pierwszej kategorii, dla którego $\bigcup_{\alpha\in A} K^\alpha = \mathbb{R}$, o ile $A$ jest nieprzeliczalny.*

Postulowany zbiór $K^\alpha$ jest przesunięciem $F_\sigma$-zbioru miary pełnej o generyczną liczbę $r_\alpha$.

**Lemat 5** ([H1], Claim 4.2). *W modelu $L^{Random(\omega_2)}[G]$ następujące stwierdzenie jest prawdziwe: Dla dowolnego $\sigma$-ideału $I$ podzbiorów $\omega_1$ znajdziemy taką punktowo-przeliczalną rodzinę $\{K^\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$, że dla dowolnego $A \subseteq \omega_1$*

$$A \in I \Longrightarrow \bigcup_{\alpha\in A} K^\alpha \in \mathcal{M}$$

*oraz*

$$A \notin I \Longrightarrow \bigcup_{\alpha\in A} K^\alpha \text{ jest rezydualny.}$$

**Lemat 6** ([H1], Claim 4.3 Cichoń). *W modelu $L^{Random(\omega_2)}[G]$ następujące stwierdzenie jest prawdziwe: Dla dowolnego $\sigma$-ideału $I$ podzbiorów $\omega_1$ istnieje taka funkcja $g : \mathbb{R} \to \omega_1$, że dla $A \subseteq \omega_1$*

$$A \in I \Longleftrightarrow g^{-1}[A] \in \mathcal{M}.$$

**Twierdzenie 25** ([H1], Theorem 4.4). *W modelu $L^{Random(\omega_2)}[G]$ następujące stwierdzenie jest prawdziwe: Niech $\omega_1$ będzie przestrzenią topologiczną z topologią porządkową. Istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \omega_1$ spełniająca warunki*

(1) *$f$ jest mierzalna w sensie Baire'a,*
(2) *$\bigcup\{f^{-1}[U] : \ f^{-1}[U] \in \mathcal{M}$ oraz $U$ jest otwarty w topologii porządkowej$\} = \mathbb{R}$.*

Przestrzeń $\omega_1$ z topologią porządkową jest przestrzenią normalną.

**Obrazy.** Praca [H4] (napisana wspólnie z R. Rałowskim) uogólnia wyniki z pracy M. Kysiaka [Ky] oraz pracy K. Ciesielskiego, H. Fejzicia i Ch. Freilinga [CFF], które dotyczą niemierzalności sum algebraicznych w odcinku lub w przestrzeni Cantora. Uogólnienia polegają na zastąpieniu operacji dodawania przez inną dwuargumentową funkcję lub ogólniej – relację. Główne twierdzenia mają dość techniczne sformułowania.

**Twierdzenie 26** ([H4], Theorem 3.1)**.** *Niech $X$ będzie dowolnym zbiorem, $T$ – nieprzeliczalną przestrzenią polską, $\mathcal{I}$ – $\sigma$-ideałem z bazą borelowską posiadającym własność otoczki. Niech $R \subseteq X^2 \times T$ będzie relacją spełniającą warunki:*

(1) $[R[X^2]]_{\mathcal{I}} = T$,
(2) $\{x \in T : \ |\{(a,b) \in X^2 : \ ((a,b),x) \in R\}| < \mathfrak{c}\} \in \mathcal{I}$,
(3) $(\forall x \in T)(\forall a \in X)(|\{b \in X : \ ((a,b),x) \in R \vee ((b,a),x) \in R\}| \leq \omega)$,
(4) $(\forall x,y \in T)(x \neq y \to |\{(a,b) \in R^{-1}[\{x\}] :$
$\{(b,a),(a,a),(a,b),(b,b)\} \cap R^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset\}| \leq \omega)$,
(5) *istnieje taka liczba kardynalna $\lambda < \mathfrak{c}$, że*
$(\forall a,b \in X)(|R(a,b)| \leq \lambda)$.

*Wtedy istnieje taki podzbiór $A \subseteq X$, że obraz $R[A \times A]$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny w $T$.*

Wnioskiem z twierdzenia 26 jest następujące uogólnienie wyniku z pracy [CFF] oraz twierdzenia pochodzącego z pracy [Ky].

**Wniosek 1** ([H4], Corollary 3.2)**.** *Niech $f \in \mathbb{R}[x,y]$ będzie symetrycznym wielomianem dwóch zmiennych, którego obraz jest równy $\mathbb{R}$. Wtedy istnieje taki podzbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, że obraz $f[A \times A]$ jest zbiorem Bernsteina w $\mathbb{R}$.*

W następnym twierdzeniu rozważamy zamiast jednej relacji jednocześnie $\mathfrak{c}$ wiele relacji. Założenie o pełnej otoczce obrazu przez relację zostało zmienione przez założenie, że dopełnienie obrazu należy do ideału.

**Twierdzenie 27** ([H4], Theorem 3.4)**.** *Niech $X$ będzie dowolnym zbiorem, $\mathcal{I}$ będzie $\sigma$-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej $T$. Załóżmy, że $\lambda < \mathfrak{c}$ albo $\lambda = \mathfrak{c}$ i $\mathfrak{c}$ jest liczba regularną. Niech $(R_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{c}} \in P(X^2 \times T)$ będzie ciągiem relacji spełniającym dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$ warunki:*

(1) $\{x \in T : \ |R_\alpha^{-1}(x)| \neq \mathfrak{c}\} \in \mathcal{I}$,
(2) $|R_\alpha \cap S| < \lambda$ *dla każdego $S$ postaci* $\Delta \times \{x\}, \ \{a\} \times X \times \{x\}, \ X \times \{a\} \times \{x\}$, *gdzie* $a \in X, \ x \in T$,
(3) $(\forall B \in Bor(T) \setminus \mathcal{I})(\exists a \in X) \ |R_\alpha^{-1}[B] \cap \{a\} \times X| = \mathfrak{c}$,
(4) $(\forall (a,b) \in X^2) \ |R_\alpha(a,b)| < \lambda$.

*Wtedy istnieje taki $A \subseteq X$, że dla dowolnego $\alpha < \mathfrak{c}$, obraz $R_\alpha[A \times A]$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny w $T$.*

Twierdzenia 27 pozwala na otrzymanie następujących dwóch wniosków dotyczących niemierzalności względem $\sigma$-ideału zbiorów miary Lebesgue'a zero i $\sigma$-ideału zbiorów pierwszej kategorii Baire'a odpowiednio.

**Wniosek 2** ([H4], Corollary 3.3)**.** *Istnieje taki podzbiór $A$ prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, że dla każdej suriekcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy $C^1$, obraz $f[A \times A]$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalnym.*

**Wniosek 3** ([H4], Corollary 3.4)**.** *Istnieje podzbiór $A$ prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, taki że dla każdej suriekcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy $C^1$ o niezerowych pochodnych cząstkowych poza zbiorem pierwszej kategorii, obraz $f[A \times A]$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{M}$-niemierzalnym.*

**Twierdzenie 28** ([H4], Theorem 3.5). *Niech $X_1$, $X_2$ będą dowolnymi zbiorami oraz $\mathcal{I}$ będzie $\sigma$-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej $T$. Wtedy dla każdej funkcji $f : X_1 \times X_2 \to T$ spełniającej warunki:*

(1) *$f$ jest suriekcją,*
(2) $\{x \in T : \omega < |f^{-1}(x)|\} \in \mathcal{I}$,
(3) *dla każdego zbioru borelowskiego $B \in Bor(T) \setminus \mathcal{I}$ mamy*

$$|\{a \in X_1 : \ |\{a\} \times X_2 \cap f^{-1}[B]| = \mathfrak{c}\}| = \mathfrak{c}.$$

*Wtedy istnieją podzbiory $A \subseteq X_1$, $B \subseteq X_2$, dla których obraz $f[A \times B]$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny. Ponadto, jeśli $X_1 = X_2$, to istnieje $A \subseteq X_1$, dla którego obraz $f[A \times A]$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny w $T$.*

Twierdzenie powyższe wraz z twierdzeniem Mycielskiego o wpisywaniu produktu zbiorów doskonałych w borelowski podzbiór produktu spoza ideału implikuje następujący wynik.

**Wniosek 4** ([H4], Corollary 3.5). *Niech $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ będą $\sigma$-ideałami z bazą borelowską na przestrzeniach polskich $T_1$, $T_2$, $T_3$ odpowiednio. Załóżmy, że funkcja $f : T_1 \times T_2 \to T_3$ spełnia warunki*

- *$f$ jest suriekcją,*
- *istnieje taki $I \in \mathcal{I}_3$, że $f^{-1}(z)$ jest przeliczalny dla $z \notin I$,*
- *dla każdego zbioru borelowskiego $B \subseteq T_3$ spoza $\mathcal{I}_3$, istnieje taki zbiór $W \in Bor(T_1 \times T_2) \setminus (\mathcal{I}_1 \otimes \mathcal{I}_2)$, że $W \subseteq f^{-1}[B]$.*

*Wtedy istnieją zbiory $A \subseteq T_1$, $B \subseteq T_2$, dla których obraz $f[A \times B]$ jest całkowicie $\mathcal{I}_3$-niemierzalny w $T_3$.*

$\mathcal{I}_1 \otimes \mathcal{I}_2$ oznacza produkt Fubiniego $\sigma$-ideałów $\mathcal{I}_1$ oraz $\mathcal{I}_2$, tzn. $\sigma$-ideał podzbiorów $T_1 \times T_2$ generowany przez borelowskie podzbiory $A$ spełniające warunek:

$$\{x \in T_1 : \ \{y \in T_2 : \ (x, y) \in A\} \notin \mathcal{I}_2\} \in \mathcal{I}_1.$$

**Podzbiory.** Omówimy teraz wyniki dotyczące pewnych specjalnych zbiorów niemierzalnych będących uogólnieniami klasycznych zbiorów Łuzina i Sierpińskiego.

**Definicja 8.** *Mówimy, że zbiór $L$ jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiorem Łuzina jeśli*

(1) $L \notin \mathcal{I}$,
(2) *dla każdego zbioru $A \in \mathcal{I}$ mamy $L \cap A \in \mathcal{J}$.*

*Niech $\kappa$ będzie liczbą kardynalną. Mówimy, że $L$ jest $(\kappa, \mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiorem Łuzina, jeśli $L$ jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiorem Łuzina oraz $L$ jest mocy $\kappa$.*

Zauważmy, że jeśli za ideał $\mathcal{J}$ przyjmiemy ideał zbiorów przeliczalnych, to otrzymamy klasyczną definicję zbioru Łuzina (dla $\mathcal{I} = \mathcal{M}$) oraz zbioru Sierpińskiego (dla $\mathcal{I} = \mathcal{N}$). W powyższy sposób można także zapisać tak zwane uogólnione zbiory Łuzina.

**Definicja 9.** *Niech $\mathcal{F} \subseteq T^T$ będzie dowolną rodziną funkcji. Powiemy, że zbiory $A, B$ są równoważne w sensie rodziny $\mathcal{F}$, jeśli spełniony jest warunek:*

$$(\exists f \in \mathcal{F})(B = f[A] \vee A = f[B]).$$

Przytoczmy techniczny wynik.

**Twierdzenie 29** ([H7], Theorem 2.1). *Załóżmy, że $\kappa = cov(\mathcal{I}) \leq non(\mathcal{J})$. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji przekształcających $T$ w $T$ spełniającą warunek $|\mathcal{F}| \leq \kappa$. Wtedy znajdziemy taki ciąg $(L_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$, że*

(1) *$L_\alpha$ jest $(\kappa, \mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiorem Łuzina,*
(2) *dla $\alpha \neq \beta$ zbiory $L_\alpha$, $L_\beta$ nie są równoważne w sensie rodziny $\mathcal{F}$.*

Dowód tego twierdzenia opiera się na indukcji pozaskończonej.
Przytoczmy teraz wnioski z tego rezultatu.

**Wniosek 2** ([H7], Corollary 2.1)**.** *Załóżmy, że $cov(\mathcal{I}) = non(\mathcal{J}) = \mathfrak{c}$. Wtedy istnieje continuum wiele borelowsko nierównoważnych $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiorów Łuzina.*

**Wniosek 3** ([H7], Corollary 2.2)**.** *Załóżmy, że $cov(\mathcal{I}) = non(\mathcal{J}) = \mathfrak{c}$. Wtedy istnieje continuum wiele $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiorów Łuzina nierównoważnych względem rodziny funkcji $\mathcal{I}$-mierzalnych.*

**Wniosek 4** ([H7], Corollary 2.3)**.**
(1) *Załóżmy, że $cov(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$. Wtedy istnieje continuum wiele $(\mathfrak{c}, \mathcal{N}, \mathcal{M})$-zbiorów Łuzina nierównoważnych względem rodziny funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a.*
(2) *Załóżmy, że $cov(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$. Wtedy istnieje continuum wiele $(\mathfrak{c}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$-zbiorów Łuzina nierównoważnych względem rodziny funkcji mierzalnych w sensie Baire'a.*

Teraz opiszemy klasę pojęć forcingu, która zachowuje "bycie $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiorem Łuzina". Skoncentrujemy się głównie na tak zwanych definiowalnych pojęciach forcingu (patrz [Za]), czyli forcingach typu $Bor(T) \setminus \mathcal{I}$ dla absolutnie definiowalnego $\sigma$-ideału $\mathcal{I}$. Zacznijmy od technicznego lematu.

**Lemat 7** ([H7], Lemma 3.1)**.** *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ ma własność Fubiniego. Niech $\mathbb{P}_{\mathcal{I}} = Bor(T) \setminus \mathcal{I}$ będzie definiowalnym pojęciem forcingu, które jest proper. Niech $B \in \mathcal{I}$ będzie zbiorem w $V^{\mathbb{P}_{\mathcal{I}}}[G]$. Wtedy istnieje zbiór $D \in \mathcal{I} \cap V$ spełniający warunek $B \cap T^V \subseteq D$.*

**Twierdzenie 30** ([H7], Theorem 3.1)**.** *Załóżmy, że $\kappa$ jest nieprzeliczalną liczbą kardynalną, ideały $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ mają własność Suslina oraz własność Fubiniego. Niech $\mathbb{P}_{\mathcal{I}} = Bor(T) \setminus \mathcal{I}$ oraz $\mathbb{P}_{\mathcal{J}} = Bor(T) \setminus \mathcal{J}$ będą definiowalnymi pojęciami forcingu. Wtedy $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ zachowuje $(\kappa, \mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiory Łuzina.*

**Twierdzenie 31** ([H7], Theorem 3.2)**.** *Niech $(\mathbb{P}, \leq)$ będzie takim pojęciem forcingu, że zbiór*

$$\{B : \ B \in \mathcal{I} \cap Bor(T), B \text{ jest kodowany w } V\}$$

*stanowi bazę ideału $\mathcal{I}$ w $V^{\mathbb{P}}[G]$. Załóżmy, że borelowskie kody dla zbiorów z ideałów $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ są absolutne. Wtedy $(\mathbb{P}, \leq)$ zachowuje $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiory Łuzina.*

Powyższe twierdzenie ma kilka zastosowań.

**Wniosek 5** ([H7], Corollary 3.1)**.** *Niech $(\mathbb{P}, \leq)$ będzie pojęciem forcingu, który nie dodaje liczb rzeczywistych, tzn. $(\omega^\omega)^V = (\omega^\omega)^{V^{\mathbb{P}}[G]}$. Załóżmy, że borelowskie kody dla zbiorów z ideałów $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ są absolutne. Wtedy $(\mathbb{P}, \leq)$ zachowuje $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiory Łuzina.*

**Wniosek 6** ([H7], Corollary 3.2)**.** *Niech $(\mathbb{P}, \leq)$ będzie $\sigma$-domkniętym pojęciem forcingu. Załóżmy, że borelowskie kody dla zbiorów z ideałów $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ są absolutne. Wtedy $(\mathbb{P}, \leq)$ zachowuje $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiory Łuzina.*

**Wniosek 7** ([H7], Corollary 3.3)**.** *Niech $\lambda$ będzie liczbą porządkową. Niech $\mathbb{P}_\lambda = ((P_\alpha, \dot{Q}_\alpha) : \alpha < \lambda)$ będzie forcingiem iterowanym z przeliczalnym nośnikiem. Załóżmy, że*
(1) *dla dowolnego $\alpha$ $P_\alpha \Vdash \dot{Q}_\alpha$ jest $\sigma$-domknięty,*
(2) *kody borelowskie dla zbiorów z ideałów $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ są absolutne.*

*Wtedy $\mathbb{P}_\lambda$ zachowuje $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-zbiory Łuzina.*

W kolejnych lematach używać będziemy relacji $\sqsubseteq^{random}$ oraz $\sqsubseteq^{Cohen}$ wprowadzonych przez M. Goldsterna w [Go]. Niech $\Omega$ oznacza rodzinę otwarto-domkniętych podzbiorów przestrzeni Cantora $2^\omega$ z topologią dyskretną. Połóżmy

$$C^{random} = \{f \in \Omega^\omega : (\forall n \in \omega)\mu(f(n)) < 2^{-n}\}.$$

Dla $f \in C^{random}$ połóżmy $A_f = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{k\geq n} f(k)$. Relacja $\sqsubseteq_n^{random}$ jest zdefiniowana formułą

$$(\forall f \in C^{random})(\forall g \in 2^\omega)(f \sqsubseteq_n^{random} g \leftrightarrow (\forall k \geq n) g \notin f(k)).$$

$\sqsubseteq^{random} = \bigcup_{n\in\omega} \sqsubseteq_n^{random}$.

Niech $C^{Cohen}$ będzie zbiorem funkcji z $\omega^{<\omega}$ w siebie. Wtedy

$$(\forall f \in C^{Cohen})(\forall g \in \omega^\omega)(f \sqsubseteq_n^{Cohen} g \leftrightarrow (\forall k < n)(g \restriction k \frown f(g \restriction k) \subseteq g)).$$

$\sqsubseteq^{Cohen} = \bigcup_{n\in\omega} \sqsubseteq_n^{Cohen}$.

**Twierdzenie 32** ([H7], Theorem 3.4)**.** *Załóżmy, że $\mathbb{P}$ jest pojęciem forcingu, który zachowuje relację $\sqsubseteq^{random}$. Wtedy $\mathbb{P}$ zachowuje $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$-zbiory Łuzina.*

**Twierdzenie 33** ([H7], Theorem 3.5)**.** *Załóżmy, że $\mathbb{P}$ jest pojęciem forcingu, który zachowuje relację $\sqsubseteq^{Cohen}$. Wtedy $\mathbb{P}$ zachowuje $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-zbiory Łuzina.*

Następny wniosek jest oparty na twierdzeniu Shelaha (patrz [Sh]) o zachowywaniu własności "każdy nowy otwarty gęsty zbiór zawiera taki stary zbiór" przez iterację o przeliczalnym nośniku forcingów proper o tej własności.

**Wniosek 8** ([H7], Corollary 3.4)**.** *Niech $\lambda$ będzie liczbą porządkową. Niech $\mathbb{P}_\lambda = ((P_\alpha, \dot{Q}_\alpha) : \alpha < \lambda)$ bedzie forcingiem iterowanym z przeliczalnym nośnikiem. Załóżmy, że*

(1) *dla dowolnego $\alpha$ $P_\alpha \Vdash \dot{Q}_\alpha$ jest proper,*
(2) *$P_\alpha \Vdash \dot{Q}_\alpha \Vdash$ każdy nowy gęsty otwarty zbiór zawiera taki stary zbiór.*

*Wtedy $\mathbb{P}_\lambda$ zachowuje $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-zbiory Łuzina.*

Rezultaty pochodzące z pracy [H8] (napisanej wspólnie z M. Michalskim) dotyczą $\mathcal{I}$-zbiorów Łuzina. Będziemy pracować w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ wyposażonej w naturalne dodawanie $+$ oraz mnożenie $\cdot$ przez liczby rzeczywiste. W niektórych przypadkach traktować będziemy przestrzeń euklidesową jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Będziemy zakładać, że $\sigma$-ideał $\mathcal{I}$ jest *niezmienniczy na przesunięcia*, tzn. dla dowolnego $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ oraz $A \in \mathcal{I}$ mamy $\bar{x} + A \in \mathcal{I}$.

**Definicja 10.** *Powiemy, że zbiór $A$ jest*

- *$\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina, jeśli dla dowolnego $I \in \mathcal{I}$ mamy $|A \cap I| < |A|$;*
- *super $\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina, jeśli $A$ jest $\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina oraz dla każdego zbioru borelowskiego $B \notin \mathcal{I}$ mamy $|A \cap B| = |A|$.*

Zauważmy, że klasyczna definicja *uogólnionego zbioru Łuzina* pokrywa się z definicją $\mathcal{M}$-zbioru Łuzina, a klasyczna definicja *uogólnionego zbioru Sierpińskiego* pokrywa się z definicją $\mathcal{N}$-zbioru Łuzina.

**Lemat 8** ([H8], Lemma 2.1)**.** *Niech $P$, $Q$ będą doskonałymi podzbiorami $\mathbb{R}^n$. Wtedy istnieją doskonałe podzbiory $P' \subseteq P$ oraz $Q' \subseteq Q$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ warunek*

$$|(P' + x) \cap Q'| \leq 1.$$

Używając powyższego lematu można skonstruować niezmienniczy na przesunięcia $\sigma$-ideał $\mathcal{J}$ z bazą borelowską, dla którego istnieje mierzalny, a nawet borelowski, zbiór $\mathcal{J}$-Łuzina.

**Twierdzenie 34** ([H8], Theorem 2.1)**.** *Istnieje niezmienniczy na przesunięcia $\sigma$-ideał $\mathcal{J}$ z bazą borelowską oraz zbiór doskonały $A$, który jest $\mathcal{J}$-zbiorem Łuzina.*

Dodatkowe naturalne założenia dotyczące $\sigma$-ideału $\mathcal{I}$ sprawiają, że każdy $\mathcal{I}$-zbiór Łuzina jest $\mathcal{I}$-niemierzalny.

Poniższa definicja została wprowadzona w pracy [BFN].

**Definicja 11.** *$\mathcal{I}$ ma słabszą własność Smitala, jeśli istnieje przeliczalny gęsty zbiór $D$ spełniający dla każdego borelowskiego $A \notin \mathcal{I}$ warunek $(A+D)^c \in \mathcal{I}$.*

Własność ta jest uogólnieniem klasycznej własności Smitala. Przykłady naturalnych ideałów z tą własnością można znaleźć w pracach [BK] oraz [BFN].

**Twierdzenie 35** ([H8], Theorem 2.2)**.** *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ ma słabszą własność Smitala. Wtedy $\mathcal{I}$-zbiór Łuzina jest $\mathcal{I}$-niemierzalny.*

W dowodzie powyższego twierdzenia istotną rolę odgrywa lemat 8.

**Lemat 9** ([H8], Lemma 2.2)**.** *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ ma słabszą własność Smitala. Wtedy z istnienia $\mathcal{I}$-zbioru Łuzina wynika istnienie super $\mathcal{I}$-zbioru Łuzina.*

**Lemat 10** ([H8], Lemma 2.3)**.** *Niech $L$ będzie $\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina. Wtedy istnieje liniowo niezależny $\mathcal{I}$-zbiór Łuzina.*

**Lemat 11** ([H8], Lemma 2.4)**.** *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ ma słabszą własność Smitala. Niech $L$ będzie $\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina mocy $\mathfrak{c}$. Wtedy istnieje liniowo niezależny super $\mathcal{I}$-zbiór Łuzina.*

**Twierdzenie 36** ([H8], Theorem 2.3 and Theorem 2.4)**.** *Niech $L$ będzie liniowo niezależnym $\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina mocy $\mathfrak{c}$. Wtedy istnieje taki zbiór $X$, że $\{x+L : x \in X\}$ jest partycją $\mathbb{R}^n$. Dodatkowo, przy założeniu $CH$, $X$ może być także $\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina.*

**Twierdzenie 37** ([H8], Theorem 2.5, 2.6, 2.7, 2.8)**.** *Załóżmy $CH$.*

- *Załóżmy, że dla dowolnego $A \in \mathcal{I}$ mamy $\frac{1}{2}A \in \mathcal{I}$. Wtedy istnieje taki $\mathcal{I}$-zbiór Łuzina $L$, że zbiór $L+L$ jest $\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina.*
- *Załóżmy, że dla dowolnego $A \in \mathcal{I}$ mamy $-A \in \mathcal{I}$. Wtedy istnieje taki $\mathcal{I}$-zbiór Łuzina $L$, że $L+L = \mathbb{R}^n$.*
- *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest zamknięty na wymierne skalowanie, tzn. $(\forall x \in \mathbb{Q})(\forall A \in \mathcal{I})(xA = \{xa : a \in A\} \in \mathcal{I})$. Wtedy dla dowolnego $m \in \omega \setminus \{0\}$ istnieje taki $\mathcal{I}$-zbiór Łuzina $L$, że $\underbrace{L+L+\cdots+L}_{m}$ jest $\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina oraz $\underbrace{L+L+\cdots+L}_{m+1} = \mathbb{R}^n$.*
- *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest zamknięty na wymierne skalowanie. Wtedy istnieje liniowo niezależny $\mathcal{I}$-zbiór Łuzina $L$, dla którego $span(L)$ jest $\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina.*

**Wniosek 9** ([H8], Corollary 2.1)**.** *Załóżmy $CH$. Niech $\mathcal{I}$ będzie zamknięty na skalowanie. Wtedy*

(1) *istnieje taki $\mathcal{I}$-zbiór Łuzina $L$, że $\underbrace{L+L+\cdots+L}_{n+1}$ jest $\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina dla każdego $n \in \omega$,*

(2) *istniej taki $\mathcal{I}$-zbiór Łuzina $L$, że $L+L=L$,*

(3) *istnieje taki $\mathcal{I}$-zbiór Łuzina $L$, że* $\langle \underbrace{L+L+\cdots+L}_{n+1} : n \in \omega\rangle$ *jest rosnącym ciągiem $\mathcal{I}$-zbiorów Łuzina.*

**Twierdzenie 38** ([H8], Theorem 2.9)**.** *Jest niesprzeczne z ZFC, że $\mathfrak{c} = \omega_2$ oraz istnieje zbiór Łuzina, który jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^n$.*

Dowód powyższego twierdzenia polega na rozważeniu modelu powstałego przez dodanie $\omega_2$ liczb Cohena do modelu spełniającego $CH$. Szukanym zbiorem jest podprzestrzeń rozpięta na dodanych generycznych liczbach Cohena.

**Twierdzenie 39** ([H8], Theorem 2.10)**.** *Załóżmy $CH$. Wtedy istnieje taki zbiór Łuzina $L$, że $L+L$ jest zbiorem Bernsteina.*

Dowód przebiega przez standardową indukcję pozaskończoną. Aby pokazać, że znalezienie odpowiednich obiektów na kroku $\alpha$ jest możliwe, znajdujemy $\Sigma^1_2$ zdanie, które to implikuje i pokazujemy jego prawdziwość w pewnym rozszerzeniu generic wyjściowego modelu. Twierdzenie Shoenfielda implikuje prawdziwość tego zdania także w modelu wyjściowym.

**Twierdzenie 40** ([H8], Theorem 2.11)**.** *Załóżmy $CH$. Wtedy istnieje taki zbiór Sierpińskiego $S$, że $S+S$ jest zbiorem Bernsteina.*

Kolejne lematy pokazują związek algebraicznej struktury w przestrzeni ze strukturą topologiczną oraz miarową.

**Lemat 12** ([H8], Lemma 2.5)**.** *Istnieje rezydualny zbiór miary zero $R$ oraz nigdziegęsty doskonały zbiór miary zero $P$, dla których $R+P \subseteq R$.*

Ostatni wynik jest pewnym uogólnieniem wyniku z pracy [Re], gdzie I. Recław pokazuje, że dla dowolnego zbioru $A$ miary zero oraz zbioru doskonałego $P$ istnieje taki doskonały podzbiór $P' \subseteq P$, że suma kompleksowa $A+P$ ma miarę zero. Następny lemat jest wzmocnieniem powyższego twierdzenia.

**Lemat 13** ([H8], Lemma 2.6)**.** *Niech $A$ będzie zbiorem miary zero. Istnieje taki zbiór doskonały $P$, że dla dowolnego $n$*

$$A + \underbrace{P+P+\cdots+P}_{n} \in \mathcal{N}.$$

**Lemat 14** ([H8], Lemma 2.8)**.** *Dla dowolnego zwartego zbioru miary zero $P$ istnieje taka rezydualna $G_\delta$ $G$, że zbiór $G+P$ jest miary zero.*

W pracy [BS] L. Babinkostova i M. Scheepers pokazali, że dla zbioru Łuzina $L$ i zbioru Sierpińskiego $S$ produkt $L \times S$ ma własność Mengera. Pociąga to, że zbiór $L+S$ też ma własność Mengera. Zbiory Mengera nie są zbiorami Bernsteina, przeto $L+S$ nie jest zbiorem Bernsteina. Ponadto, w pracy [Sc] M. Scheepers udowodnił, że jeśli $A$ jest zbiorem miary zero oraz ma własność $s_0$, a $S$ jest zbiorem Sierpińskiego, to suma kompleksowa $A+S$ ma własność $s_0$. Następne twierdzenie nieco wzmacnia te rezultaty przy pewnym dodatkowym założeniu teoriomnogościowym.

**Twierdzenie 41** ([H8], Theorem 2.12)**.** *Załóżmy, że $\mathfrak{c}$ jest regularną liczbą kardynalną. Dla dowolnego uogólnionego zbioru Łuzina $L$ oraz uogólnionego zbioru Sierpińskiego $S$, zbiór $L+S$ ma własność $s_0$.*

W dowodzie powyższego twierdzenia wykorzystujemy lemat 14.

Następne twierdzenie pokazuje istotność założenia o regularności continuum.

**Twierdzenie 42** ([H8], Theorem 2.13)**.** *Następujące zdanie jest niesprzeczne z ZFC: Istnieją uogólniony zbiór Łuzina $L$ oraz uogólniony zbiór Sierpińskiego $S$, dla których $L + S = \mathbb{R}^n$.*

Konstrukcja poszukiwanego modelu przebiega następująco. Zaczynamy od modelu $V$ spełniającego $GCH$. Niech $P_\alpha$ będzie iteracją za skończonym nośnikiem $(\dot{Q}_\beta : \ \beta < \alpha)$, gdzie $\Vdash_\beta \dot{Q}_\beta = \mathcal{C} \times \mathcal{R}_{\aleph_{\beta+2}}$ dla $\beta < \alpha$. $\mathcal{C}$ oznacza forcing dodający jedną liczbę Cohena (jako element $\mathbb{R}^n$) a $\mathcal{R}_\kappa$ jest forcingiem dodającym $\kappa$ niezależnych liczb Solovay'a (jako elementów $\mathbb{R}^n$). W otrzymanym modelu definiujemy szukane zbiory w następujący sposób

$$S = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} R_\alpha \cup \{-c_\alpha\}, \quad L = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} \{c_\alpha + x : \ x \in \mathbb{R}^n \cap V_\alpha\}.$$

## Omówienie pozostałego dorobku naukowego

Lista prac wchodzących do pozostałego dorobku naukowego:

[P1] Sz. Żeberski, *Nonstandard proofs of Eggelston like theorems*, Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium (Prague 2001) Topology Atlas (Toronto 2002), 353-357,

[P2] J.Cichoń, Sz. Żeberski, *On the splitting number and Mazurkiewicz theorem*, Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica 42 (2) (2001), 23-25,

[P3] J.Cichoń, M.Morayne, R.Rałowski, C.Ryll-Nardzewski, Sz. Żeberski, *On nonmeasurable unions*, Topology and its Applications 154 (2007), 884-893,

[P4] R. Rałowski, P. Szczepaniak, Sz. Żeberski, *A generalization of Steinhaus theorem and some nonmeasurable sets*, Real Analysis Exchange, 35 (1) (2009/2010), 1-9,

[P5] J. Kraszewski, R. Rałowski, P. Szczepaniak, Sz. Żeberski, *Bernstein sets and kappa coverings*, Mathematical Logic Quarterly, 56 (2) (2010), 216-224,

[P6] M. Bienias, Sz. Głąb, R. Rałowski, Sz. Żeberski, *Two point sets with additional properties*, Czechoslovak Mathematical Journal, 63 (4) (2013), 1019-1037,

[P7] T. Banakh, M. Morayne, R. Rałowski, Sz. Żeberski, *Topolgically invariant $\sigma$-ideals on Euclidean spaces*, Fundamenta Mathematicae, 231 (2015), 101-112,

[P8] T. Banakh, M. Morayne, R. Rałowski, Sz. Żeberski, *Topolgically invariant $\sigma$-ideals on the Hilbert cube*, Israel Journal of Mathematics, 209 (2015), 715–743,

[P9] T. Banakh, R. Rałowski, Sz. Żeberski, *Classifying invariant $\sigma$-ideals with analytic base on good Cantor measure spaces*, przyjęta do Proceedings of the American Mathematical Society.

Praca [P1] zawiera niestandardowy dowód twierdzenia Eggelstona, które mówi, że w dowolny zbiór miary dodatniej na płaszczyźnie można wpisać produkt dwóch zbiorów doskonałych. Dowód opiera się na twierdzeniu Shoenfielda o absolutności zdań $\Sigma^1_2$ oraz twierdzeniu z pracy [CKP] o tym, że w algebrze Boole'a $Bor/\mathcal{N}$ można znaleźć zbiór gęsty mocy $cof(\mathcal{N})$.

Ponadto, używając wypracowanych technik, udowodniono następujący rezultat.

**Twierdzenie 43** ([P1], Theorem 4)**.** *Niech $A \subseteq [0,1]^2$ będzie zbiorem miary 1. Wtedy znajdziemy dwa zbiory $F, Q \subseteq [0,1]$ spełniające warunki: $F$ jest zbiorem $F_\sigma$ miary 1, $Q$ jest zbiorem doskonałym oraz $F \times Q \subseteq A$.*

Pokazano też analogiczne wyniki dla ideału zbiorów pierwszej kategorii.

**Twierdzenie 44** ([P1], Theorem 5)**.** *Niech $A \subseteq [0,1]^2$ będzie zbiorem drugiej kategorii mierzalnym w sensie Baire'a. Wtedy znajdziemy dwa zbiory $G, Q \subseteq [0,1]$ spełniające warunki: $G$ jest zbiorem $G_\delta$, $G \notin \mathcal{M}$, $Q$ jest zbiorem doskonałym oraz $G \times Q \subseteq A$.*

**Twierdzenie 45** ([P1], Theorem 6)**.** *Niech $A \subseteq [0,1]^2$ będzie zbiorem rezydualnym. Wtedy znajdziemy dwa zbiory $C, Q \subseteq [0,1]$ spełniające warunki: $C$ jest zbiorem rezydualnym typu $G_\delta$, $Q$ jest zbiorem doskonałym oraz $C \times Q \subseteq A$.*

W pracy [P2] (napisanej wspólnie z J. Cichoniem) udowodniono niestandardowo twierdzenie Mazurkiewicza mówiące o tym, że z ciągu $\{f_n\}_{n\in\omega}$ funkcji borelowskich z $[0,1]$w $[0,1]$ można wybrać podciąg, który jest zbieżny punktowo na pewnym zbiorze doskonałym. Dowód opiera się na twierdzeniu Shoenfielda oraz następującej charakteryzacji liczby $\mathfrak{s}$.

**Lemat 15** ([P2], Lemma 1). *Następujące liczby kardynalne są równe:*

(1) $\mathfrak{s} = \min\{\kappa : \ \{0,1\}^\kappa$ *nie jest ciągowo zwarta* $\}$
(2) $\mathfrak{s}' = \min\{\kappa : \ (\{0,1\}^\omega)^\kappa$ *nie jest ciągowo zwarta* $\}$
(3) $\mathfrak{s}'' = \min\{\kappa : \ [0,1]^\kappa$ *nie jest ciągowo zwarta* $\}$

W pracy [P3] (napisanej wspólnie z J. Cichoniem, M. Morayne, R. Rałowskim, Cz. Ryll-Nardzewskim) uzyskano kilka rezultatów dotyczących znajdowania podrodzin o całkowicie niemierzalnej sumie względem $\sigma$-ideałów $\mathcal{I}$ spełniających pewne dodatkowe założenia wyrażone przy użyciu współczynników kardynalnych. Założenia te dla wielu naturalnych $\sigma$-ideałów są niezależne od $ZFC$.

**Twierdzenie 46** ([P3], Theorem 3.2). *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest $\sigma$-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej $T$ oraz $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \mathrm{cof}(\mathcal{I})$. Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ będzie taką rodziną, że $T \setminus \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$ oraz niech $\mathcal{A}$ będzie punktowo mała, tj.*

$$\Big\{x :\in T : \ \bigcup\{A \in \mathcal{A} : \ x \notin A\} \notin \mathcal{I}\Big\} \in \mathcal{I}.$$

*Wtedy istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna.*

**Twierdzenie 47** ([P3], Theorem 3.1). *Niech $\mathcal{I}$ będzie takim $\sigma$-ideałem na przestrzeni polskiej $T$, że istnieje zbiór całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny o mocy mniejszej niż $cov_h(\mathcal{I})$. Wtedy dla dowolnej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ takiej, że $T \setminus \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$ istnieje jej podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma mnogościowa $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalna.*

Dla $\sigma$-ideału podzbiorów pierwszej kategorii na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ założenia powyższego twierdzenia są spełnione w rozszerzeniu generic uniwersum konstruowalnego $L$ o $\omega_2$ niezależnych liczb Cohena. Wtedy $cov(\mathcal{M}) = \omega_2 = \mathfrak{c}$, a postulowany całkowicie niemierzalny zbiór ma następującą postać:

$$\{c_\xi + r \in \mathbb{R} : \ \xi < \omega_1 \wedge r \in \mathbb{Q}\}.$$

Podobny argument działa dla ideału zbiorów miary zero $\mathcal{N}$, gdy dodamy $\omega_2$ niezależnych liczb losowych do uniwersum Gödla $L$.

Twierdzenie to znalazło zastosowanie w pracy Y. Kuznetsovej [Kuz], w której to zostały poruszane zagadnienia z analizy harmonicznej. Kuznetzowa zadała pytanie, czy dla każdego niepustego zbioru $A \in \mathcal{N}$ miary zero na prostej rzeczywistej, istnieje zbiór $B$ taki, że suma kompleksowa $A + B$ jest niemierzalna. W każdym modelu, w którym powyższe twierdzenie dla miary jest prawdziwe (np. w modelu otrzymanego przez dodanie $\omega_2$ liczb Solovay'a do uniwersum konstruowalnego), odpowiedź na pytanie Kuznetsovej jest pozytywna. W wyniku czego, każdy mierzalny homomorfizm pomiędzy lokalnie zwartą grupą a grupą topologiczną jest ciągły.

Twierdzenie 46 posłużyło do znajdowania niemierzalnych sum dla pewnych rodzin zbiorów w abelowych grupach polskich względem niezmienniczych na przesunięcia $\sigma$-ideałów. Powiemy, że zbiór $C \subseteq G$ jest zbiorem $\mathcal{I}$-Gruenhage'a, jeżeli dla dowolnego $\mathcal{I}$-mierzalnego zbioru $B$ oraz dowolnego zbioru $T \in [G]^{<\mathfrak{c}}$ zbiór $B \setminus (C + T)$ jest niepusty. Darji i Keleti [DK] udowodnili że, jeżeli $C \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym o wymiarze pakującym $dim_p(C) < 1$, to dla $T \in [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$ $\mathbb{R} \neq T + C$. Klasyczny zbiór Cantora $C$ jest zatem zbiorem $\mathcal{N}$-Gruenhage'a.

**Twierdzenie 48** ([P3], Theorem 5.2). *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest niezmienniczym na przesunięcia $\sigma$-ideałem z bazą borelowską na abelowej grupie polskiej $(G, +)$, to dla każdego zbioru $C \subseteq G$, dla którego $C \cup -C$ jest zbiorem $\mathcal{I}$-Gruenhage'a, istnieje taki $P \subseteq G$, że $P + C$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym w $G$.*

Zachodzi naturalne pytanie, czy tezę w powyższym twierdzeniu można wzmocnić do warunku $P \subseteq C$. Odpowiedź jest twierdząca w przypadku klasycznego zbioru Cantora. Poniższe twierdzenie zostało udowodnione przy użyciu metody ultrafiltru.

**Twierdzenie 49** ([P3], Corollary 5.10)**.** *Jeżeli $C$ jest klasycznym zbiorem Cantora, to istnieje jego podzbiór $P \subseteq C$, dla którego suma kompleksowa $P+C$ jest zbiorem niemierzalnym w sensie Lebesgue'a.*

**Twierdzenie 50** ([P3], Theorem 4.1)**.** *Załóżmy, że $T$ jest nieprzeliczalną przestrzenią polską oraz rodzina $\mathcal{A} \subseteq [T]^{\leq\omega}$ jest punktowo-przeliczalna tzn. dla każdego $x \in T$ $\{A \in \mathcal{A} : x \in A\} \in [\mathcal{A}]^{\leq\omega}$. Jeśli $\bigcup \mathcal{A} = T$, to istnieje taka podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, że $\bigcup \mathcal{A}'$ jest zbiorem Bernsteina.*

**Twierdzenie 51** ([P3], Theorem 4.4)**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie $\sigma$-ideałem z bazą borelowską na przestrzeni polskiej $T$. Jeżeli $\mathcal{A} \subseteq P(T)$ jest $Bor(T)[\mathcal{I}]$-sumowaną rodziną przeliczalnych zbiorów domkniętych o ograniczonej przeliczalnej randze Cantora-Bendixona tzn.*

$$(\exists \alpha < \omega_1)(\forall A \in \mathcal{A})\ (A^\alpha = \emptyset),$$

*to $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$.*

Wnioskiem z powyższego twierdzenia jest fakt, że jeśli $\mathcal{A}$ jest rodziną przeliczalnych zbiorów domkniętych o przeliczalnej ograniczonej randze Cantora-Bendixona, dla której $\bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}$, to istnieje jej podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, której suma $\bigcup \mathcal{A}'$ jest $\mathcal{I}$-niemierzalna.

**Twierdzenie 52** ([P3], Theorem 6.8)**.** *Każda partycja prostej rzeczywistej na zbiory pierwszej kategorii ma podrodzinę, której suma jest całkowicie $\mathcal{M}$-niemierzalna.*

Dowód powyższego twierdzenia wykorzystuje twierdzenie Gitika Shelaha z pracy [GS1] stanowiące, że algebra Boole'a postaci $P(\kappa)/\mathcal{I}$ nie może być izomorficzna z algebrą Cohena oraz twierdzenie Erdősa-Alaoglu, a właściwie jego wersję wynikającą z dowodu z pracy Taylora [Ta].

W pracy [P5] (napisanej wspólnie z J. Kraszewskim, R. Rałowskim, P. Szczepaniakiem) rozważano takie zbiory na abelowych grupach polskich, które nakrywają pewne przesunięcie dowolnego zbioru o mocy $\kappa$ (dla ustalonej $\kappa$). Zbiory te nazywamy $\kappa$-nakrywającymi (ang. $\kappa$-covering). Analogicznie, powiemy że zbiór $A \subseteq G$ jest $< \kappa$-nakrywający, jeżeli każdy podzbiór grupy $G$ mocy mniejszej niż $\kappa$, da się wsunąć w zbiór $A$ przy użyciu jednego przesunięcia. Inspiracją tej pracy były wyniki otrzymane przez K. Muthuvela w pracy [Mu] dotyczące głównie zbiorów $\kappa$-nakrywających dla skończonej liczby kardynalnej $\kappa$ oraz wyniki A. Nowika z prac [No1, No2], gdzie rozważane były zbiory $\omega$ lub $< \omega$-nakrywające o niskiej klasie deskryptywnej.

**Twierdzenie 53** ([P5], Theorem 2.1)**.** *Istnieje rozbicie prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ na dwa zbiory Bernsteina, z których żaden nie jest zbiorem 2-nakrywającym.*

**Twierdzenie 54** ([P5], Theorem 2.2, Proposition 2.5)**.** *Istnieje partycja prostej $\mathbb{R}$ na continuum wiele zbiorów Bernsteina, z których każdy jest $< cof(\mathfrak{c})$-nakrywający.*

*Ponadto, jeżeli $\mathcal{I}$ jest $\sigma$-ideałem na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ mającym własność Steinhausa, to założenie $\mathrm{non}(\mathcal{I}) < \mathfrak{c}$ implikuje istnienie zbioru całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnego, który jest $< \mathfrak{c}$-nakrywający.*

Pojęcie zbioru $\kappa$-nakrywającego stało się punktem wyjścia do pewnych uogólnień, mianowicie $S$-nakrycia oraz $I$-nakrycia.

**Definicja 12.** *Powiemy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest $\kappa$-$S$-nakryciem jeśli*
- *jest rodziną parami rozłącznych podzbiorów prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$,*
- $|\mathcal{A}| = \kappa$,
- $(\forall F \in [\mathbb{R}]^\kappa)(\exists t \in \mathbb{R})(\forall A \in \mathcal{A})\ |(t + F) \cap A| = 1.$

Wyniki pracy [P5] dotyczą rodzin $\mathcal{A}$, których elementami są zbiory całkowicie niemierzalne względem pewnych $\sigma$-ideałów na $\mathbb{R}$. Przytoczmy jeden z przykładów.

**Twierdzenie 55** ([P5], Theorem 3.3)**.** *Niech $\kappa$ będzie liczbą kardynalną, $2 < \kappa < \mathfrak{c}$. Jeżeli $2^\kappa \leq \mathfrak{c}$, to istnieje taka partycja $\mathbb{R}$ na zbiory Bernsteina $\{B_\xi : \xi < \kappa\}$, że*
- *dla dowolnego $\xi < \kappa$ $B_\xi$ nie jest zbiorem 2-nakrywającym, ale*
- *$\{B_\xi : \xi < \kappa\}$ jest $\kappa$-$S$-nakryciem.*

$MA$ implikuje, że jeśli $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$, to $2^\kappa = \mathfrak{c}$, co gwarantuje niesprzeczność tezy twierdzenia z teorią $ZFC$.

Nieco ogólniejszą sytuację przedstawia kolejne twierdzenie.

**Twierdzenie 56** ([P5], Theorem 3.5)**.** *Niech $\kappa$ będzie taką liczbą kardynalną, że $2^\kappa = \mathfrak{c}$. Niech $(G, +)$ będzie nieprzeliczalną abelową grupą polską z zadaną metryką $d$. Ponadto, niech $\mathcal{I} \subseteq P(G)$ będzie takim $\sigma$-ideałem na $G$, że*
- $(\forall B \in Bor(G) \setminus \mathcal{I})(\forall \mathcal{D} \in [\mathcal{I}]^{<\mathfrak{c}})\ |B \setminus \bigcup \mathcal{D}| = \mathfrak{c}$,
- *istnieje takie $a \in rng(d) \setminus \{0\}$, że $(\forall x \in G)\ \{y \in G : \ d(x, y) = a\} \in \mathcal{I}$.*

*Wtedy istnieje rodzina $\{B_\xi : \xi < \kappa\}$ parami rozłącznych zbiorów, dla której*
1. *$B_\xi$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym w $G$ dla dowolnej $\xi < \kappa$,*
2. *$B_\xi$ nie jest zbiorem 2-nakrywającym dla dowolnego $\xi < \kappa$,*
3. *$\{B_\xi : \xi < \kappa\}$ jest $\kappa$-$S$-nakryciem.*

Przesunięcie w definicji zbioru, który jest $\kappa$-nakryciem możemy zastąpić dowolną izometrią np. na płaszczyznie. Wtedy mamy do czynienia z pojęciem zbioru, który jest $\kappa$-$I$-nakryciem.

**Definicja 13.** *Podzbiór płaszczyzny $A \subseteq \mathbb{R}^2$ jest $\kappa$-$I$-nakryciem jeżeli*
$$(\forall B \in [\mathbb{R}^2]^\kappa)(\forall \varphi)(\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ jest izometrią i } \varphi[B] \subseteq A).$$

Następujące dwa twierdzenia pokazują różnicę pomiędzy zbiorami 2- a 3- $I$ nakrywającymi.

**Twierdzenie 57** ([P5], Theorem 4.3)**.** *Każdy zbiór Bernsteina w $\mathbb{R}^2$ jest zbiorem 2-$I$-nakrywającym.*

**Twierdzenie 58** ([P5], Theorem 4.4)**.** *Istnieje zbiór Bernsteina w $\mathbb{R}^2$, który nie jest zbiorem 3-$I$-nakrywającym.*

Tezy twierdzenia 57 nie można rozszerzyć na dowolne zbiory całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalne.

**Twierdzenie 59** ([P5], Theorem 4.5)**.** *Jeśli $\mathcal{I} \in \{\mathcal{N}, \mathcal{M}\}$ to istnieje taki zbiór całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny w $\mathbb{R}^2$, który nie jest 2-$I$-nakrywający.*

W pracy [P6] (napisanej wspólnie z M. Bieniasem, Sz. Głąbem oraz R. Rałowskim) badano zbiory, które wprowadził S. Mazurkiewicz. W literaturze zbiory te znane są jako zbiory Mazurkiewicza lub zbiory dwu-punktowe (ang. two-point sets).

**Definicja 14.** *Powiemy, że podzbiór płaszczyzny $A \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zbiorem Mazurkiewicza jeżeli z każdą prostą na płaszczyźnie ma dokładnie dwa punkty wspólne.*

Wiadomo, że zbiory te są dość złożone. D. Larman w pracy [La] pokazał, że zbiór Mazurkiewicza nie może być $F_\sigma$. A. Miller w pracy [Mi] skonstruował koanalityczny zbiór Mazurkiewicza w uniwersum konstruowalnym $L$.

**Twierdzenie 60** ([P6], Theorem 2.2). *Niech $\mathcal{I}$ będzie $\sigma$-ideałem z bazą borelowską zawierającym singletony. Istnieje zbiór Mazurkiewicza, który stanowi bazę Hamela przestrzeni $\mathbb{R}^2$ nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ i jest jednocześnie zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym.*

**Twierdzenie 61** ([P6], Theorem 3.3). *Istnieje zbiór Mazurkiewicza, który jest w ideale Marczewskiego $s_0$.*

**Twierdzenie 62** ([P6], Theorem 3.5). *Załóżmy, że dla każdego zbioru borelowskiego $B$ spoza $\sigma$-ideału $\mathcal{I}$ istnieje $\mathfrak{c}$ wiele prostych równoległych, z których każda ma przekrój ze zbiorem $B$ mocy continuum. Wtedy*

(1) *istnieje zbiór Mazurkiewicza $A$ w ideale $s_0$, który stanowi bazę Hamela i jest jednocześnie zbiorem całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalnym,*
(2) *istnieje zbiór Mazurkiewicza $B$ będący bazą Hamela, który jest całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny i nie jest mierzalny w sensie Marczewskiego.*

Pojęcie zbioru Mazurkiewicza można w naturalny sposób uogólnić do $\kappa$-punktowego zbioru dla ustalonej liczby kardynalnej $2 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$, to jest takiego podzbioru płaszczyzny, który z każdą prostą ma przekrój mocy $\kappa$.

**Twierdzenie 63** ([P6], Theorem 4.6). *Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Każdy $n$-punktowy zbiór da się rozbić na $n$ parami rozłącznych bijekcji $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.*

Związek pomiędzy zbiorem Bernsteina na prostej $\mathbb{R}$ a zbiorem Mazurkiewicza ilustruje następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 64** ([P6], Theorem 4.9). *Dla dowolnego zbioru Bernsteina $B \subseteq \mathbb{R}$ istnieje zbiór Mazurkiewicza $A \subseteq \mathbb{R}^2$, który jest jednocześnie zbiorem miary zero oraz pierwszej kategorii w $\mathbb{R}^2$ o tej własności, że dla dowolnej funkcji $f \subseteq A$, przeciwobraz $f^{-1}[(0,1)]$ jest równy $B$.*

Dowolny zbiór Mazurkiewicza nie jest ani zbiorem Bernsteina ani zbiorem Łuzina ani zbiorem Sierpińskiego. Fakt ten był powodem wprowadzenia pojęcia częściowego zbioru Mazurkiewicza, to znaczy takiego zbioru, który z każdą prostą ma co najwyżej dwupunktowe przecięcie.

**Twierdzenie 65** ([P6], Theorem 5.5). *Załóżmy $CH$. Wtedy istnieje zbiór Łuzina, który jest częściowym zbiorem Mazurkiewicza.*

Analogiczny wynik jest prawdziwy dla zbioru Sierpińskiego.

W kolejnych twierdzeniach badano związek zbiorów $\kappa$-punktowych ze zbiorami $\lambda$-nakrywającymi.

**Twierdzenie 66** ([P6], Theorem 6.3, 6.4).
(1) *Istnieje $\omega$-punktowy zbiór, który nie jest zbiorem 2-$I$-nakrywającym.*
(2) *Istnieje $\omega$-punktowy zbiór, który jest zbiorem $\omega$-nakrywającym.*

**Twierdzenie 67** ([P6], Theorem 6.5). *Rozważmy model $ZFC$ otrzymany przez dodanie do uniwersum konstruowalnego $L$ $\omega_2$ niezależnych liczb Cohena. W tym modelu $\omega_1 < \mathfrak{c} = \omega_2$ oraz istnieje $\omega_1$-punktowy zbiór, który jest jednocześnie zbiorem $\omega_1$-nakrywającym.*

**Twierdzenie 68** ([P6], Theorem 6.7). *Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

(1) *istnieje $n$-punktowy zbiór $A$, który nie jest zbiorem 2-$I$-nakrywającym,*
(2) *istnieje $n$-punktowy zbiór $B$, który jest zbiorem $n$-nakrywającym.*

W pracy [P6] badano własności kombinatoryczne zbiorów Mazurkiewicza z punktu widzenia rodzin zbiorów prawie rozłącznych.

**Twierdzenie 69** ([P6], Theorem 7.1)**.** *Niech $h$ będzie ustaloną definiowalną bijekcją borelowską pomiędzy prostą rzeczywistą $\mathbb{R}$ a przestrzenią Ramsey'a $[\omega]^\omega$. Niech $\pi_1, \pi_2$ będą rzutami ortogonalnymi płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na pierwszą oś, na drugą oś. Jest relatywnie niesprzeczne z $ZFC$ że, $\neg CH$ oraz istnieje taki częściowy zbiór Mazurkiewicza $A \subseteq \mathbb{R}^2$, że $h[\pi_1[A] \cup \pi_2[A]]$ stanowi maksymalną rodzinę mocy $\omega_1$ zbiorów prawie rozłącznych w $\omega$.*

**Twierdzenie 70** ([P6], Theorem 7.5)**.** *W modelu otrzymanym przez dodanie $\omega_2$ liczb Cohena do uniwersum konstruowalnego $L$ istnieje częściowy zbiór Mazurkiewicza $C \subseteq \mathbb{R}^2$ mocy $\omega_2$, który jest zbiorem Łuzina i czyni zadość warunkowi*

$$(\exists A \in \mathcal{N})(\forall D \in [C]^{\omega_1})\ A + D = \mathbb{R}^2.$$

Analogiczny wynik dotyczący zbioru Sierpińskiego możemy uzyskać w modelu otrzymanym przez dodanie $\omega_2$ liczb Solovay'a.

Inspiracją pracy [P4] (napisanej wspólnie z R. Rałowskim i P. Szczepaniakiem) było klasyczne twierdzenie Steinhausa stanowiące, że dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ o dodatniej mierze Lebesgue'a suma kompleksowa $A + B$ ma niepuste wnętrze.

Następujący wynik tej pracy jest uogólnieniem wspomnianego wyżej twierdzenia Steinhausa.

**Twierdzenie 71** ([P4], Theorem 2.1)**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie $\mathcal{N}$ lub $\mathcal{M}$ (na $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^2$ zależnie od kontekstu). Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy $C^1$ oraz*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \vee \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0\right\} \in \mathcal{I}.$$

*Niech $A, B \in Bor(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{I}$ będą borelowskimi zbiorami spoza $\sigma$-ideału $\mathcal{I}$. Wtedy zbiór $f[A \times B]$ zawiera niepusty przedział otwarty na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.*

Twierdzenie Steinhausa, w swej podstawowej wersji, posłużyło do dowodu twierdzenia Cichonia-Szczepaniaka [CS] o kuli w przestrzeni euklidesowej.

**Twierdzenie 72** (Cichoń-Szczepaniak)**.** *Niech $m, n$ będą dwiema różnymi dodatnimi liczbami naturalnymi oraz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie izomorfizmem przestrzeni liniowych nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Jeśli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz jego dopełnienie mają niepuste wnętrza w $\mathbb{R}^n$, to obraz $f[A] \subseteq \mathbb{R}^m$ ma miarę wewnętrzną Lebesgue'a równą zero i równocześnie pełną mairę zewnętrzną w sensie Lebesgue'a na $\mathbb{R}^m$.*

Twierdzenie 72 pozwoliło otrzymać niemierzalne zbiory o pewnych algebraicznych własnościach. Przykładem takich zastosowań są następujące twierdzenia uzyskane w omawianej pracy.

**Twierdzenie 73** ([P4], Theorem 3.2)**.** *Istnieje taki zbiór całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalny $A \subseteq \mathbb{R}$, że $A + A = A$ oraz $A - A = \mathbb{R}$.*

**Twierdzenie 74** ([P4], Theorem 3.3)**.** *Istnieje taka partycja $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ na zbiory całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne, że dla każdego $n \in \omega$ zachodzi $A_n + A_n = A_n$.*

**Twierdzenie 75** ([P4], Theorem 3.5). *Istnieje taka partycja $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ na zbiory całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne, że*

$$(\forall m, n \in \omega)\ m \neq n \Rightarrow A_m + A_n = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Powyższe twierdzenia mają swoje odpowiedniki dla skończonych rozbić prostej $\mathbb{R}$.

**Twierdzenie 76** ([P4], Theorem 3.7). *Istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, że $A, A+A, A+A+A, \ldots$ są całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne oraz $\bigcup_{n\in\omega} \underbrace{A + \ldots + A}_{n} = \mathbb{R}$.*

Twierdzenie to również ma swój skończony odpowiednik.

**Twierdzenie 77** ([P4], Theorem 3.9). *Istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, że*

$$A \subsetneq A + A \subsetneq A + A + A \subsetneq \ldots$$

*są całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne oraz $\bigcup_{n\in\omega} \underbrace{A + \ldots + A}_{n}$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalnym na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.*

**Twierdzenie 78** ([P4], Theorem 3.11). *Istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, że*

$$A \supsetneq A + A \supsetneq A + A + A \supsetneq \ldots$$

*są całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.*

W pracy [P4] podano również odpowiedniki multiplikatywne wyżej wymienionych rezultatów.

**Twierdzenie 79** ([P4], Corollary 3.2). *Istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalny, że $A \cdot A = A$.*

**Twierdzenie 80** ([P4], Corollary 3.3). *Istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, że*

$$A \subsetneq A \cdot A \subsetneq A \cdot A \cdot A \subsetneq \ldots$$

*są całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalne oraz $\bigcup_{n\in\omega} \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$ jest zbiorem całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalnym na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.*

**Ideały.** W pracy [P7] (napisanej wspólnie z T. Banakhem, M. Morayne i R. Rałowskim) rozważano nietrywialne topologicznie niezmiennicze $\sigma$-ideały w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że ideał jest topologicznie niezmienniczy jeśli dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{I}$ oraz homeomorfizmu $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ obraz $h[A]$ należy do ideału $\mathcal{I}$. $\sigma$-ideał $\mathcal{I}$ nazywamy nietrywialnym jeśli $\mathbb{R}^n \notin \mathcal{I}$ oraz istnieje nieprzeliczalny zbiór w $\mathcal{I}$.

**Twierdzenie 81** ([P7], Theorem 2.1). *Dowolny nietrywialny $\sigma$-ideał $\mathcal{I}$ z BP-bazą na przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jest zawarty w ideale $\mathcal{M}$ zbiorów pierwszej kategorii.*

Z powyższego twierdzenia wynika zatem, że $\sigma$-ideał $\mathcal{M}$ jest największym $\sigma$-ideałem w rozważanej klasie.

Opisano także najmniejszy wśród topologicznie niezmienniczych nietrywialnych $\sigma$-ideałów z bazą borelowską. Jest to $\sigma\mathcal{C}_0$ generowany przez "tame" zbiory Cantora. Zbiór Cantora $C$ nazywamy "tame" zbiorem Cantora jeśli istnieje homeomorfizm $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dla którego $h[C]$ jest zawarty w prostej $\mathbb{R} \times \{\bar{0}\}$.

**Twierdzenie 82** ([P7], Theorem 2.2). *$\sigma$-ideał $\sigma\mathcal{C}_0$ jest zawarty w dowolnym nietrywialnym topologicznie niezmienniczym $\sigma$-ideale $\mathcal{I}$ z bazą analityczną w $\mathbb{R}^n$.*

Przypomnijmy, że dla dowolnych ideałów $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ na przestrzeni polskiej, relatywne współczynniki wyrażają się wzorami

$$\mathrm{add}(\mathcal{I},\mathcal{J}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{J}\},$$
$$\mathrm{cof}(\mathcal{I},\mathcal{J}) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{J} \wedge (\forall A \in \mathcal{I})(\exists B \in \mathcal{B}) A \subseteq B\}.$$

Następujące twierdzenie opisuje współczynniki kardynalne ideału $\sigma\mathcal{C}_0$.

**Twierdzenie 83** ([P7], Theorem 2.4). *Zachodzą równości*

(1) $\mathrm{cov}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$,
(2) $\mathrm{non}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{non}(\mathcal{M})$,
(3) $\mathrm{add}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{add}(\sigma\mathcal{C}_0, \mathcal{M}) = \mathrm{add}(\mathcal{M})$,
(4) $\mathrm{cof}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{cof}(\sigma\mathcal{C}_0, \mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M})$.

Dzięki powyższemu twierdzeniu oraz znajomości najmniejszego i największego z rozważanych $\sigma$-ideałów można opisać współczynniki kardynalne dowolnego topologicznie niezmienniczego $\sigma$-ideału $\mathcal{I}$.

**Wniosek 10** ([P7], Corollary 2.5). *Niech $\mathcal{I}$ będzie topologicznie niezmienniczym nietrywialnym $\sigma$-ideałem podzbiorów $\mathbb{R}^n$ z bazą analityczną. Wtedy*

(1) $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$,
(2) $\mathrm{non}(\mathcal{I}) = \mathrm{non}(\mathcal{M})$,
(3) $\mathrm{add}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{add}(\mathcal{M})$,
(4) $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) \geq \mathrm{cof}(\mathcal{M})$.

Zatem w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ następująca wersja diagramu Cichonia opisuje zależności pomiędzy współczynnikami kardynalnymi ideału zbiorów pierwszej kategorii $\mathcal{M}$ oraz dowolnego nietrywialnego topologicznie niezmienniczego $\sigma$-ideału $\mathcal{I}$ z bazą analityczną.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{non}(\mathcal{I}) \arrow[r, equal] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{I}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
\omega_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{I}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r, equal] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{I}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Następujący przykład pokazuje, że nierówności $\mathrm{add}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{add}(\mathcal{M})$ oraz $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{I})$ mogą być ostre.

**Przykład 1** ([P7], Exemple 2.6). *Topologicznie niezmienniczy $\sigma$-ideał $\mathcal{I}_{\mathbb{I}} \subseteq P(\mathbb{R}^2)$ generowany przez odcinek $\mathbb{I} = [0,1] \times \{0\}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ ma następujące współczynniki kardynalne*

$$\mathrm{add}(\mathcal{I}_{\mathbb{I}}) = \omega_1, \;\; \mathrm{non}(\mathcal{I}_{\mathbb{I}}) = \mathrm{non}(\mathcal{M}), \;\; \mathrm{cov}(\mathcal{I}_{\mathbb{I}}) = \mathrm{cov}(\mathcal{M}), \;\; \textit{oraz} \;\; \mathrm{cof}(\mathcal{I}_{\mathbb{I}}) = \mathfrak{c}.$$

Okazuje się, że pewna klasa ideałów ma wszystkie współczynniki kardynalne zgodne ze współczynnikami $\sigma$-ideału $\mathcal{M}$ zbiorów pierwszej kategorii w $\mathbb{R}^n$.

**Twierdzenie 84** ([P7], Theorem 2.7). *Dla dowolnej liczby naturalnej $0 \leq k < n$ $\sigma$-ideał $\sigma\mathcal{D}_k$ generowany przez domknięte co najwyżej $k$-wymiarowe podzbiory $\mathbb{R}^n$ ma następujące współczynniki kardynalne*

$$\mathrm{add}(\sigma\mathcal{D}_k) = \mathrm{add}(\mathcal{M}), \;\; \mathrm{cov}(\sigma\mathcal{D}_k) = \mathrm{cov}(\mathcal{M}),$$
$$\mathrm{non}(\sigma\mathcal{D}_k) = \mathrm{non}(\mathcal{M}), \;\; \mathrm{cof}(\sigma\mathcal{D}_k) = \mathrm{cof}(\mathcal{M}).$$

Motywacją dla pracy [P8] (napisanej wspólnie z T. Banakhem, M. Morayne i R. Rałowskim) było pytanie zamieszczone na stronie internetowej M. Csärnyei, czy minimalna moc rodziny zbiorów Cantora pokrywającej kostkę Hilberta $\mathbb{I}^\omega$ jest taka sama jak minimalna moc rodziny zbiorów Cantora pokrywającej odcinek $\mathbb{I} = [0, 1]$. Praca [P8], daje odpowiedź twierdzącą. W artykule tym rozważano topologicznie niezmiennicze nietrywialne ideały na kostce Hilberta $\mathbb{I}^\omega$ wyposażonej w topologię produktową.

Następne twierdzenie opisuje rolę ideału $\mathcal{M}$ zbioru pierwszej kategorii na przestrzeni $\mathbb{I}^\omega$ wśród rozważanych $\sigma$-ideałów .

**Twierdzenie 85** ([P8], Theorem 1.1)**.** *Ideał $\mathcal{M}$ zbiorów pierwszej kategorii na kostce Hilberta $\mathbb{I}^\omega$ jest:*

(1) *maksymalnym nietrywialnym topologicznie niezmienniczym ideałem z bazą zbiorów o własności Baire'a na $\mathbb{I}^\omega$,*
(2) *największym nietrywialnym topologicznie niezmienniczym ideał z bazą złożoną ze zbiorów $\sigma$-zwartych na $\mathbb{I}^\omega$.*

W pracy [P8] pokazano również, że rodzina nietrywialnych topologicznie niezmienniczych $\sigma$-ideałów z bazą borelowską na kostce Hilberta $\mathbb{I}^\omega$ zawiera najmniejszy element. Jest to $\sigma$-ideał $\sigma\mathcal{C}_0$ generowany przez tak zwane "tame" zbiory Cantora w $\mathbb{I}^\omega$. Zatem najmniejszy element wśród rozważanych $\sigma$-ideałów jest opisany w podobny sposób jak w przypadku przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Zauważmy, że w kostce Hilberta $\sigma\mathcal{C}_0$ pokrywa się z $\sigma$-ideałem generowanym przez zero-wymiarowe $Z$-zbiory w $\mathbb{I}^\omega$. Domknięty zbiór $A$ w przestrzeni topologicznej $X$ nazywamy *$Z$-zbiorem* w $X$, jeśli dla dowolnego otwartego pokrycia $\mathcal{U}$ przestrzeni $X$ istnieje przekształcenie ciągłe $f : X \to X \setminus A$, które jest *$\mathcal{U}$-bliskie* przekształceniu identycznościowemu, tzn. dla dowolnego $x \in X$ zbiór $\{f(x), x\}$ jest zawarty w pewnym $U \in \mathcal{U}$.

**Twierdzenie 86** ([P8], Theorem 1.2)**.** *$\sigma$-ideał $\sigma\mathcal{C}_0$ jest zawarty w każdym topologicznie niezmienniczym nietrywialnym $\sigma$-ideale $\mathcal{I}$ z bazą ko-analityczną w $\mathbb{I}^\omega$.*

W badaniu współczynników kardynalnych dla $\sigma$-ideału $\sigma\mathcal{C}_0$ istotną rolę odegrały kombinatoryczne charakteryzacje dla $\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{M})$ podane przez T. Bartoszyńskiego (np. [Ba],[BJ]). W przypadku add oraz cof głównym narzędziem był fakt, że przestrzeń wszystkich homeomorfizmów na kostce Hilberta $\mathbb{I}^\omega$ jest przestrzenią polską z topologią zwarto-otwartą, która pochodzi od metryki

$$\tilde{d}(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{I}^\omega} d(f(x), g(x)) + \sup_{x \in \mathbb{I}^\omega} d(f^{-1}(x), g^{-1}(x)).$$

Istotnym narzędziem było też twierdzenie "$Z$-set unknotting theorem" z pracy [Ch], które gwarantuje, że każde dwa minimalne zbiory Cantora $A,\ B \subseteq \mathbb{I}^\omega$ są "ambiently" homeomorficzne. Oznacza to, że istnieje homeomorfizm $h \in Home(\mathbb{I}^\omega)$ spełniający warunek $h[A] = B$.

Zależności pomiędzy współczynnikami kardynalnymi dla $\sigma$-ideałów $\mathcal{M}$ oraz $\sigma\mathcal{C}_0$ są przedstawione w następującym twierdzeniu.

**Twierdzenie 87** ([P8], Theorem 1.5)**.**

- $\mathrm{non}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{non}(\mathcal{M})$,
- $\mathrm{cov}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$,
- $\mathrm{add}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathrm{add}(\sigma\mathcal{C}_0, \mathcal{M})$,
- $\mathrm{cof}(\sigma\mathcal{C}_0) = \mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\sigma\mathcal{C}, \mathcal{M})$.

W pracy [P8] znaleziono również najmniejszy wśród topologicznie niezmienniczych $\sigma$-ideałów, które nie są zawarte w $\mathcal{M}$. Jest to $\sigma$-ideał $\sigma\mathcal{G}_0$ generowany prze tak zwane *tame-$G_\delta$ zbiory*,

Otwarty podzbiór $U$ przestrzeni $\mathbb{I}^\omega$ nazywamy *tame otwartą kulą* jeśli
- jego domknięcie $\bar{U}$ w $\mathbb{I}^\omega$ jest homeomorficzne z kostką Hilberta,
- jego brzeg $\partial U$ w $\mathbb{I}^\omega$ jest homeomorficzny z kostką Hilberta,
- $\partial U$ jest $Z$-zbiorem w $\bar{U}$ oraz w $\mathbb{I}^\omega \setminus U$.

W pracy [Ch] pokazano, że rodzina tame otwartych kul stanowi topologiczną bazę przestrzeni Hilberta.

Zbiór $U$ w $\mathbb{I}^\omega$ nazywamy *tame otwartym zbiorem* w $\mathbb{I}^\omega$ jeśli $U = \bigcup \mathcal{U}$ dla pewnej znikającej rodziny $\mathcal{U}$ tame otwartych kul z parami rozłącznymi domknięciami w $\mathbb{I}^\omega$. Rodzina $\mathcal{U}$ jest jedyna oraz pokrywa się z rodziną $\mathcal{C}(U)$ wszystkich spójnych komponent $U$. Przez $\bar{\mathcal{C}}(U) = \{\bar{C} : C \in \mathcal{C}(U)\}$ oznaczamy (rozłączną) rodzinę domknięć spójnych komponent zbioru $U$.

Zbiór $G$ w $\mathbb{I}^\omega$ nazywamy *tame $G_\delta$-zbiorem* w $\mathbb{I}^\omega$ jeśli $G = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ dla pewnego ciągu $(U_n)_{n\in\omega}$ tame otwartych zbiorów w $\mathbb{I}^\omega$ spełniających warunki
- $\bigcup \bar{\mathcal{C}}(U_{n+1}) \subseteq U_n$ dla każdego $n \in \omega$,
- rodzina $\bigcup_{n\in\omega} \bar{\mathcal{C}}(U_n)$ jest znikająca w $\mathbb{I}^\omega$.

W pracy [BR] pokazano, że gęsty $G_\delta$-zbiór $G$ w $\mathbb{I}^\omega$ jest minimalny (i.e. dla dowolnego gęstego $G_\delta$-zbioru $H$ istnieje homeomorfizm $h$ kostki Hilberta spełniający warunek $h[G] \subseteq H$) wtedy i tylko wtedy, gdy $G$ jest gęstą tame $G_\delta$ w $\mathbb{I}^\omega$.

**Twierdzenie 88** ([P8], Theorem 1.3). *$\sigma$-ideał $\sigma\mathcal{G}_0$ jest zawarty w każdym topologicznie niezmienniczym $\sigma$-ideale $\mathcal{I} \not\subseteq \mathcal{M}$ z bazą zbiorów z własnością Baire'a w $\mathbb{I}^\omega$.*

Współczynniki kardynalne dotyczące $\sigma$-ideału $\sigma\mathcal{G}_0$ można opisać za pomocą następującego diagramu.

**Twierdzenie 89** ([P8], Theorem 1.6).

$$\omega_1 \le \mathrm{add}(\sigma\mathcal{G}_0) \le \mathrm{cov}(\sigma\mathcal{G}_0) \le \mathrm{add}(\mathcal{M}) \le \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \le \mathrm{non}(\sigma\mathcal{G}_0) \le \mathrm{cof}(\sigma\mathcal{G}_0) \le \mathfrak{c}.$$

Reasumując, w klasie topologicznie niezmienniczych $\sigma$-ideałów $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ na $\mathbb{I}^\omega$ posiadających bazę analityczną mamy następujący topologiczny wariant diagramu Cichonia.

**Twierdzenie 90** ([P8], Corollary 1.7). *Niech $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{J} \not\subseteq \mathcal{M}$. Wtedy*

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathrm{non}(\sigma\mathcal{G}_0) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{J}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{J}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathrm{non}(\mathcal{I}) \arrow[r, equal] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{I}) \arrow[urr, bend right] & & \\
 & & \mathrm{add}(\mathcal{I}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathrm{cov}(\mathcal{I}) \arrow[u] & & \\
\omega_1 \arrow[r] \arrow[urr, bend left] & \mathrm{add}(\mathcal{J}) \arrow[r] & \mathrm{cov}(\mathcal{J}) \arrow[r] & \mathrm{cov}(\sigma\mathcal{G}_0) \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd}$$

Opiszemy teraz pewne topologicznie niezmiennicze $\sigma$-ideały $\mathcal{I}$ z $\sigma$-zwartą bazą na przestrzeni Hilberta, których współczynniki kardynalne pokrywają się z odpowiednimi współczynnikami ideału $\mathcal{M}$. W następnej definicji dla zwartej przestrzeni topologicznej $X$ przez $\mathcal{K}(X)$ oznaczamy rodzinę wszystkich zbiorów zwartych w przestrzeni $X$ wyposażoną w topologię Vietorisa. Hiperprzestrzeń $\mathcal{K}(X)$ jest częściowo uporządkowana przez relację zawierania.

**Definicja 15.** *Ideał $\mathcal{I}$ w przestrzeni topologicznej $X$*

- *jest $G_\delta$-ideałem jeśli zbiór $\mathcal{I} \cap \mathcal{K}(X)$ jest typu $G_\delta$ w hiperprzestrzeni $\mathcal{K}(X)$,*
- *ma własność $(*)$ Soleckiego jeśli dla dowolnej przeliczalnej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{K}(X)$ suma $\bigcup \mathcal{A}$ jest zawarta w takim zbiorze $G \subseteq X$ typu $G_\delta$, że $\mathcal{K}(G) \subseteq \mathcal{I}$,*
- *jest $\sigma^{(*)}$-ideałem jeśli istnieje taki ciąg $(\mathcal{I}_n)_{n\in\omega}$ $G_\delta$-ideałów z własnością $(*)$ Soleckiego na $X$, że $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ dla przeliczalnej podrodziny $\mathcal{A} \subset \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{I}_n \cap \mathcal{K}(X)\}$.*

Ideały z powyższymi własnościami były badane przez S. Soleckiego w pracy [So].

**Twierdzenie 91** ([P8], Corollary 1.10)**.** *Dowolny nietrywialny topologicznie niezmienniczy $\sigma^{(*)}$-ideał $\mathcal{I}$ na $\mathbb{I}^\omega$ ma następujące współczynniki kardynalne*

$$\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \mathrm{add}(\mathcal{M}), \ \ \mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \mathrm{cov}(\mathcal{M}), \ \ \mathrm{non}(\mathcal{I}) = \mathrm{non}(\mathcal{M}) \ \ \textit{oraz} \ \ \mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M}).$$

Używając ostatniego twierdzenia, możemy policzyć współczynniki kardynalne dla $\sigma$-ideałów $\sigma(\mathcal{Z}_n \cap \overline{\mathcal{D}}_m)$, $n, m \le \omega$ rozwiązując Problem 2.6 z pracy [BCZ]. $\sigma$-ideał $\sigma(\mathcal{Z}_n \cap \overline{\mathcal{D}}_m)$ jest generowany przez domknięte $Z_n$-podzbiory przestrzeni $\mathbb{I}^\omega$ o wymiarze topologicznym nie większym niż $m$.

**Wniosek 11** ([P8], Corollary 1.11)**.** *Dla dowolnych $n, m \le \omega$ $\sigma$-ideał $\mathcal{I} = \sigma(\mathcal{Z}_n \cap \overline{\mathcal{D}}_m)$ jest $\sigma^{(*)}$-ideałem na $\mathbb{I}^\omega$ oraz ma następujące współczynniki kardynalne*

$$\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \mathrm{add}(\mathcal{M}), \ \ \mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \mathrm{cov}(\mathcal{M}), \ \ \mathrm{non}(\mathcal{I}) = \mathrm{non}(\mathcal{M}), \ \ \mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M}).$$

W pracy [P9] sklasyfikowano $\sigma$-ideały niezmiennicze na homeomorfizmy zachowujące miarę na dobrych (ang. good) miarowych przestrzeniach Cantora.

*Miarową przestrzenią Cantora* nazywamy parę $(X, \mu)$ składającą się z przestrzeni topologicznej $X$ oraz $\sigma$-addytywnej miary $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty)$ zdefiniowanej na $\sigma$-algebrze borelowskich podzbiorów $X$, gdzie $X$ jest homeomorficzny z kostką Cantora $\{0,1\}^\omega$. Miarowa przestrzeń Cantora $(X, \mu)$ jest *dobra* jeśli związana z nią miara $\mu$ jest *dobra* w sensie Akina [Ak], i.e., $\mu$ jest ciągła, *ściśle dodatnia* (co oznacza, że $\mu(U) > 0$ dla dowolnego niepustego zbioru $U \subseteq X$) oraz spełniony jest *Warunek Podzbioru* co oznacza, że dla dowolnych otwarto-domkniętych zbiorów $U, V \subseteq X$ spełniających warunek $\mu(U) < \mu(V)$ istnieje taki otwarto-domknięty zbiór $U' \subseteq V$, że $\mu(U') = \mu(U)$.

Klasa dobrych miarowych przestrzeni Cantora zawiera wszystkie nieskończone zwarte zerowymiarowe metryzowalne grupy topologiczne $G$ z miarą Haara.

**Twierdzenie 92** ([P9], Theorem 1.1)**.** *Na dobrej miarowej przestrzeni Cantora istnieją cztery nietrywialne $\sigma$-ideały z bazą analityczną niezmiennicze na działanie homeomorfizmów zachowujących miarę. Są to: $\mathcal{E}$, $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$. ($\mathcal{E}$ jest $\sigma$-ideałem generowanym przez zbiory domknięte $\mu$-miary zero.)*

Uzyskany rezultat jest konsekwencją szeregu lematów opisujących własności homeomorfizmów zachowujących miarę na dobrej przestrzeni miarowej Cantora.

**Lemat 16** ([P9], Lemma 2.2)**.** *Niech $(X, \mu)$ będzie dobrą miarową przestrzenią Cantora, $U \subseteq X$ będzie zbiorem otwarto-domkniętym oraz $K \subseteq U$ będzie zbiorem zwartym. Dla dowolnego $\alpha \in \mu[Clop(X)]$ spełniającego warunek $\mu(K) < \alpha \le \mu(U)$ istnieje taki otwarto-domknięty podzbiór $V \subseteq U$, że $K \subseteq V$ oraz $\mu(V) = \alpha$.*

**Lemat 17** ([P9], Lemma 2.4)**.** *Każdy zachowujący miarę homeomorfizm $f : A \to B$ pomiędzy domkniętymi nigdziegęstymi podzbiorami $A, B \subseteq X$ dobrej miarowej przestrzeni Cantora $(X, \mu)$ można rozszerzyć do zachowującego miarę homeomorfizmu $f : X \to X$ całej przestrzeni $X$.*

**Lemat 18** ([P9], Lemma 2.5). *Niech* $(X, \mu)$, $(Y, \lambda)$ *będą miarowymi przestrzeniami Cantora spełniającymi warunki* $\mu(X) < \lambda(Y)$ *oraz niech miara* $\lambda$ *będzie ściśle dodatnia. Niech* $G_X \subseteq X$ *oraz* $G_Y \subseteq Y$ *będą zbiorami typu* $G_\delta$. *Załóżmy, że* $\mu(G_X) = \lambda(G_Y) = 0$ *oraz* $G_Y$ *jest gęsty w* $Y$. *Wtedy istnieje zachowujące miarę włożenie* $f : X \to Y$ *spełniające warunek* $f(G_X) \subseteq G_Y$.

**Lemat 19** ([P9], Lemma 2.6). *Niech* $(X, \mu)$ *będzie dobrą miarową przestrzenią Cantora,* $A$ *– domkniętym zbiorem nigdziegęstym,* $B \subseteq X$ *– zbiorem borelowskim z miarą* $\mu(B) > \mu(A)$ *w* $X$. *Wtedy istnieje zachowujący miarę homeomorfizm* $h : X \to X$ *spełniający warunek* $h(A) \subseteq B$.

**Lemat 20** ([P9], Lemma 2.9). *Niech* $(X, \mu)$ *będzie dobrą miarową przestrzenią Cantora,* $d$ *– metryką generującą topologię na* $X$. *Niech* $B \subseteq X$ *będzie zbiorem borelowskim miary* $\mu(B) = \mu(X)$. *Dla dowolnego* $\varepsilon > 0$, *homeomorfizmu* $f \in \mathcal{H}_\mu(X)$ *oraz domkniętego nigdziegęstego podzbioru* $A \subseteq C$ *w* $X$ *takiego, że* $f(A) \subseteq B$, *istnieje homeomorfizm* $g \in \mathcal{H}_\mu(X)$ *spełniający warunki* $g \restriction A = f \restriction A$, $g(C) \subseteq B$ *oraz* $d_{\mathcal{H}}(f, g) < \varepsilon$.

**Lemat 21** ([P9], Lemma 2.10). *Dla dowolnych* $F_\sigma$*-zbiorów pierwszej kategorii* $A, B \subseteq X$ *miary* $\mu(A) = \mu(B) = \mu(X)$ *w dobrej miarowej przestrzeni Cantora* $(X, \mu)$ *istnieje zachowujący miarę homeomorfizm* $h \in \mathcal{H}_\mu(X)$ *spełniający warunek* $h(A) = B$.

**Lemat 22** ([P9], Lemma 2.11). *Jeśli analityczny podzbiór* $A \subseteq X$ *miarowej przestrzeni Cantora* $(X, \mu)$ *nie należy do* $\sigma$*-ideału* $\mathcal{E}$, *to* $A$ *zawiera podzbiór* $G$ *typu* $G_\delta$ *taki, że* $\mu(G) = 0$ *oraz miara* $\mu \restriction \bar{G}$ *jest ściśle dodatnia.*

## Literatura


[Ak] E. Akin, *Good measures on Cantor space*, Transactions of the American Mathematical Society, 357 (7) (2005), 2681–2722,

[BS] L. Babinkostova, M. Scheepers, *Products and selection principles*, Topology Proceedings, 31 (2007), 431–443,

[BK] M. Balcerzak, E. Kotlicka, *Steinhaus property for products of ideals*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 63 (2003), 235–248,

[BCZ] T. Banakh, R. Cauty, M. Zarichnyi, *Open problems in infinite-dimensional topology*, in: Open Problems in Topology, II (E. Pearl ed.), Elsevier, (2007), 601–624,

[BR] T. Banakh, D. Repovš, *Universal meager $F_\sigma$-sets in locally compact manifolds*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 54 (2) (2013), 179–188,

[BFN] A. Bartoszewicz, M. Filipczak, T. Natkaniec, *On Smital properties*, Topology and its Applications, (2011), Vol 158, 2066–2075,

[Ba] T. Bartoszyński, *Combinatorial aspects of measure and category*, Fundamenta Mathematicae, vol. 127 (3) (1987), 225–239,

[BH] T. Bartoszyński, L. Halbeisen, *On a theorem of Banach and Kuratowski and K-Lusin sets*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 33 (4), (2003), 1223–1231,

[BJ] T. Bartoszyński, H. Judah, *Set theory: on the structure of the real line*, A K Peters, Ltd. Wellesley Massachusetts, 1995,

[BJS] T. Bartoszyński, H. Judah, S. Shelah, *The Cichoń diagram*, The Journal of Symbolic Logic, 58 (1993), no. 2, 401–423,

[BCGR] J. Brzuchowski, J. Cichoń, E. Grzegorek, Cz. Ryll-Nardzewski, *On the existence of nonmeasurable unions*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, vol. 27, no. 6 (1997), 447–448,

[Bu] L. Bukovsky, *Any partition into Lebesgue measure zero sets produces a nonmeasurable set*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, vol. 27, no. 6 (1979), no. 6, 431–435,

[Buk] L. Bukovsky, *Generalized Luzin sets*, Acta Universitatis Carolinae , Mathematica et Physica, 51, (2010), 5–8,

[Ch] T.A. Chapman, *Lectures on Hilbert cube manifolds*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1976,

[CS] J. Cichoń, P. Szczepaniak, *Hamel-isomorphic images of the unit ball*, Mathematical Logic Quarterly, vol. 56, no. 6 (2010), 625–630,

[CK] J. Cichoń, A. Kharazishvili, *On ideals with projective bases*, Georgian Mathematical Journal, 9 (2002) (3), 461–472,

[CKP] J. Cichoń, A. Kamburelis, J.Pawlikowski, *On dense subsets of the measure algebra*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 84, No 1, (1985), 142–146,

[CFF] K. Ciesielski, H. Fejzić, Ch. Freiling, *Measure zero sets with nonmeasurable sum*, Real Analysis Exchange, vol. 27, no. 2 (2001-2002), 783-793,

[DK] U. B. Darji and T. Keleti, *Covering R with translates of a compact set*, Proceedings of the American Mathematical Society, 131 (2003), no. 8, 2593–2596,

[Fr] D. Fremlin, *Measure-additive coverings and measurable selectors*, Dissertationes Mathematicae, 260 (1987),

[Fre] D. Fremlin, *Measure Theory*, vol.5, Set-theoretic Measure Theory,

[FT] D.Fremlin, S. Todorcević, *Partition of* $[0,1]$ *into negligible sets*, 2004, preprint dostępny na stronie `http://www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin/preprints.htm`

[GS1] M. Gitik, S. Shelah, *Forcing with ideals and simple forcing notions*, Israel Journal of Mathematics, 62 (1989), 129–160,

[GS2] M. Gitik, S. Shelah, *More on real-valued measurable cardinals and forcings with ideals*, Israel Journal of Mathematics, 124 (1), (2001), 221–242,

[Go] M. Goldstern, *Tools of your forcing construction*, Israel Journal Conference Proceedings, 6 (1992), 307–362,

[Ku] K. Kuratowski, *A theorem on ideals and some applications of it to the Baire property in Polish spaces*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 31 (1976) no 5 (191), 108–111,

[KR] K. Kuratowski, Cz. Ryll-Nardzewski, *General theorem on selectors*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics 13 (1965), 397–403,

[Kuz] Y. Kuznetsova, *On continuity of measurable group representations and homomorphisms*, Studia Mathematica, 210, no. 3 (2012), 197–208,

[Ky] M. Kysiak, *Nonmeasurable algebraic sums of sets of reals*, Colloquium Mathematicum, vol. 102, no. 1 (2005), 113–122,

[La] D. G. Larman, *A problem incidence*, Journal of London Mathematical Society, vol. 43 (1968), 407–409,

[Lu] Luzin N., *Sur un problème de M. Biare*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris, 158, (1914), 1258-1261,

[Mi] A. Miller, *Infinite combinatorics and definability*, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 41 no 2, (1989), 179–203,

[Mu] K. Muthuvel, *Application of covering sets*, Colloquium Mathematicum, vol. 80, (1999), 115–122,

[No1] A. Nowik, *Some topological properties of* $\omega$*-covering sets*, Czechoslovak Journal of Mathematics, 50 (125), (2000), 865–877,

[No2] A. Nowik, *On extended version of* $\aleph_0$*-covering sets and their applications*, Tatra Mountains Mathematical Publications, vol. 35, (2007), 13–23,

[Re] I. Recław, *Some additive properties of special sets of reals*, Colloquium Mathematicum, 62 (2) (1991), 221–226,

[Sc] M. Scheepers, *Additive properties of sets of reals number and infinite game*, Quaestiones Mathematicae, 16 (2) (1993), 177–191,

[Sch] M. Scheepers, *Lusin sets*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 127, No 1, (1999), 251–257,

[Sh] S. Shelah, *Proper and improper forcing*, Lecture Notes in Mathematics, 2nd ed., 940, XLVII, (1998),

[Si1] W. Sierpiński, *Sur la question de la measurabilite de la base de M. Hamel*, FUNDAMENTA MATHEMATICAE, 1 (1920), 105–111,

[Si2] W. Sierpiński , *Sur l'hypothese du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$)*, FUNDAMENTA MATHEMATICAE, 5, (1924), 177-187,

[So] S. Solecki, *$G_\delta$ ideals of compact sets*, JOURNAL OF THE EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY, 13 (4) (2011), 853–882,

[Ta] A. Taylor, *On saturated sets of ideals and Ulam's problem*, FUNDAMENTA MATHEMATICAE, 109 (1980), 37–53.

[Za] J. Zapletal, *Forcing Idealized*, CAMBRIGDE TRACTS IN MATHEMATICS, (2008).