Układ MHD w ograniczonym obszarze

Celem projektu było zbadanie istnienia rozwiązania problemu początkowo-brzegowego dla magnetohydrodynamicznego układu (MHD)

$$
\begin{aligned}
& u_t - \nu\Delta u + u\cdot\nabla u = -\nabla p + b\cdot\nabla b, \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^N, t>0,\\
& b_t - \eta\Delta b + u\cdot\nabla b = b\cdot\nabla u, \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^N, t>0,\\
& div\, u = div\, v = 0,\\
& u=0, \quad b=0 \text{ on } \partial\Omega,\\
& u(0,x)=u_0(x), \quad b(0,x)=b_0(x), \quad x\in\Omega,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

gdzie Ω jest ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^N$ z brzegiem klasy C^2, $N=2,3$, u,b są funkcjami wektorowymi zmiennych t i x, tj. $u(t,x)=(u_1(t,x),\ldots,u_N(t,x))$ oraz $b(t,x)=(b_1(t,x),\ldots,b_N(t,x))$, całkowite ciśnienie p jest funkcją rzeczywistą zmiennych t i x ($p=p(t,x)$), dodatnia stała $\nu>0$ oznacza lepkość płynu a stała $\eta>0$ jest parametrem magnetycznej dyfuzyjności. Stosując podejście półgrupowe Dana Henry'ego oraz oszacowania Giga-Miyakawa skonstruowaliśmy globalne w czasie, jedyne rozwiązania ułamkowych aproksymacji układu MHD w przestrzeni bazowej $(L^2(\Omega))^N\times(L^2(\Omega))^N$. W przypadku dwuwymiarowym (2-D) rozważyliśmy rodzinę pod-krytycznych problemów aproksymacyjnych postaci

$$
\begin{aligned}
& u_t + \nu_2(-P\Delta)^\alpha u + P(u\cdot\nabla u) = P(b\cdot\nabla b), \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^2, t>0,\\
& b_t + \eta_2(-P\Delta)^\beta b + P(u\cdot\nabla b) = P(b\cdot\nabla u), \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^2, t>0,\\
& u=0, \quad b=0 \text{ on } \partial\Omega,\\
& u(0,x)=u_0(x), \quad b(0,x)=b_0(x), \quad x\in\Omega.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

z parametrami $\alpha,\beta>1$, gdzie $\nu_2,\eta_2>0$ oraz $-P\Delta$ oznacza operator Stoksa. Natomiast w przypadku trójwymiarowym (3-D) rozważyliśmy następującą rodzinę aproksymacyjnych problemów

$$
\begin{aligned}
& u_t + [\nu(-P\Delta)+\nu_3(-P\Delta)^\alpha]\,u + P(u\cdot\nabla u) = P(b\cdot\nabla b), \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^3, t>0,\\
& b_t + \left[\eta(-P\Delta)+\eta_3(-P\Delta)^\beta\right] b + P(u\cdot\nabla b) = P(b\cdot\nabla u), \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^3, t>0,\\
& u=0, \quad b=0 \text{ on } \partial\Omega,\\
& u(0,x)=u_0(x), \quad b(0,x)=b_0(x), \quad x\in\Omega.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

z parametrami $\nu_3,\eta_3>0$, gdzie $\alpha,\beta>\frac{5}{4}$ ustalone i $\nu,\eta>0$.

Słabe rozwiązania układu MHD otrzymaliśmy jako granicę rozwiązań powyższych aproksymacji. W przypadku 2-D stosując lemat Lionsa-Aubina o zwartości pokazaliśmy, że rozwiązania problemu (2) zbiegają do słabego rozwiązania problemu (1), gdy $\alpha,\beta\to 1^+$ (po podciągu). Podobny rezultat otrzymaliśmy w przypadku 3-D przechodząc z $\nu_3,\eta_3\to 0^+$ w równaniu (3). Ponieważ w naszych rozważaniach przechodziliśmy do granicy po podciągu, otrzymane rozwiązania nie muszą być jedyne. Uzyskane w ramach projektu rezultaty zostały zawarte w pracy MHD EQUATIONS IN A BOUNDED DOMAIN złożonej do druku. Ponadto, rezultaty te zostały zaprezentowane na 3 międzynarodowych konferencjach:

- RomFin 2019 and FSDONA 2019 10-15 czerwiec 2019, Turku Finlandia,
- International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA) International Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA), 26–31 sierpień 2019, Hakodate, Japonia,
- The sixth Najman Cnference on Spectral Theory and Differential Equations, 8-13 wrzesień 2019, Sveti Martin na Muri, Chorwacja.