

**Rekrutacja do Szkoły Doktorskiej w Uniwersytecie Śląskim w Katowicach na rok akademicki 2026/2027**

Tematy w dyscyplinie matematyka

**Admission to the Doctoral School at the University of Silesia in Katowice for academic year 2026/2027**

Topics in mathematics

Spis treści	Contents
1. Asymptotyczne własności modeli immuno-epidemiologicznych – dr hab. Katarzyna Pichór, prof. UŚ	1. Asymptotic properties of immuno-epidemiological models – dr hab. Katarzyna Pichór, prof. UŚ
2. Asymptotyczne własności modeli populacyjnych – dr hab. Katarzyna Pichór, prof. UŚ	2. Asymptotic properties of population models – dr hab. Katarzyna Pichór, prof. UŚ
3. Efektywne obliczanie modułu różniczek Kählera – dr hab. Przemysław Koprowski, prof. UŚ	3. Efficient computation the module of Kähler differentials – dr hab. Przemysław Koprowski, prof. UŚ
4. Modelowanie matematyczne ekspresji genów – dr hab. Katarzyna Pichór, prof. UŚ	4. Mathematical modelling of gene expression – dr hab. Katarzyna Pichór, prof. UŚ
5. Własności ergodyczne wybranych klas niestacjonarnych markowskich układów dynamicznych – dr hab. Hanna Wojewódka-Ściążko, prof. UŚ	5. Ergodic properties of selected classes of non-stationary Markov dynamical systems – dr hab. Hanna Wojewódka-Ściążko, prof. UŚ

Matematyka temat nr 1	Mathematics topic No. 1
<b>Asymptotyczne własności modeli immuno-epidemiologicznych</b>	<b>Asymptotic properties of immuno-epidemiological models</b>
PhD supervisor: <b>dr hab. Katarzyna Pichór, prof. UŚ</b>	
<p><b>Krótką charakterystyką założeń i celów badawczych</b></p> <p>Matematyczne modele epidemiologiczne opisują relacje między różnymi grupami osób, w tym osobnikami podatnymi S, zakażonymi I, odpornymi R, narażonymi E, zaszczepionymi V itp . Jednak przebieg epidemii zależy również od rozkładu odporności w populacji , dlatego w modelach</p>	<p><b>Brief description of research assumptions and goals</b></p> <p>Mathematical epidemiological models describe the relationships between different groups of people, including susceptible individuals S, infected individuals I, recovered individuals R, exposed individuals E, vaccinated individuals V, etc . However, the course of an epidemic also depends on the distribution of</p>



epidemiologicznych należy uwzględnić dynamikę układu odpornościowego. Celem tego projektu będzie tworzenie i badanie modeli, w których uwzględnia się status immunologiczny osobników. Status immunologiczny to stężenie określonych przeciwciał, które pojawiają się po zakażeniu patogenem i pozostają w surowicy, zapewniając ochronę przed przyszłymi atakami tego samego patogenu.

Z czasem liczba przeciwciał spada do poziomu niewystarczającego do zahamowania kolejnej infekcji. Podczas infekcji odporność zostaje wzmocniona, a następnie stopniowo słabnie. Badanie takich procesów będących połączeniem dynamiki stanu ciągłego i dynamiki stanu dyskretnego wraz z efektami stochastycznymi prowadzi do procesów stochastycznych, w tym kawałkami deterministycznych procesów Markowa i bardziej zaawansowanych procesów semimarkowskich oraz równań różniczkowych cząstkowych z nielokalnymi perturbacjami.

Nasze cele badawcze to:

- 1) konstruowanie i badanie modeli epidemiologicznych, w których bierze się pod uwagę status immunologiczny populacji,
- 2) zastosowanie kawałkami deterministycznych procesów Markowa lub procesów semimarkowskich w modelowaniu procesów immunologicznych,
- 3) analiza asymptotycznych własności takich modeli w tym kwestia istnienia stanów endemicznych.

Celem projektu jest

tworzenie nowych modeli zjawisk biologicznych, które pojawiają się w immunologii i epidemiologii, oraz dostarczanie nowych narzędzi matematycznych do badania istniejących modeli biologicznych.

W pewnych modelach immuno-epidemiologicznych rozkłady osób podatnych i zakażonych względem statusu odpornościowego i wieku są opisane za pomocą układu równań różniczkowych cząstkowych.

Naszym celem będzie udowodnienie istnienia rozwiązań stacjonarnych dla tego układu równań.

Będziemy badać przebieg epidemii. Analiza asymptotycznych własności takich modeli często

immunity in the population, which is why epidemiological models must take into account the dynamics of the immune system. The aim of this project will be to create and study models in which

the immune status of individuals is taken into account. The immune status is the concentration of specific antibodies, which appear after infection with a pathogen and remain in serum, providing protection against future attacks of the same pathogen. Over time, the number of antibodies decreases to a level

insufficient to inhibit another infection. During the infection, the immunity is boosted and then the immunity gradually wanes. The study of such processes, which are a combination of continuous-state dynamics

and discrete -state dynamics with stochastic effects, leads to stochastic processes such as piecewise deterministic Markov processes and more advanced semi-Markov processes and partial differential equations with nonlocal perturbations.

Description of the topic and scientific goal of the project

Our research objectives are:

- 1) constructing and studying epidemiological models that take into account the immune status of the population,
- 2) the application of piecewise deterministic Markov processes or semi-Markov processes in modeling immunological processes
- 3) analysis of the asymptotic properties of such models, including the question of the existence of endemic states.

Our aim is to

construct new models of biological phenomena which appear in

immunology, and epidemiology and to provide new mathematical tools to study existing biological models. In certain immuno-epidemiological models, the distributions of susceptible and infected individuals with respect to immunological status and age are described using a system of partial differential equations.

Our goal will be to prove the existence of stationary solutions for this system of equations.





<p>sprowadza się do badania związanych z nimi pólgrup operatorów dodatnich.</p>	<p>We will study the course of the epidemic. The analysis of the asymptotic properties of such models often leads to the study of the associated semigroups of positive operators .</p>
<p><b>Planowany wkład w rozwój dyscypliny</b> Znaczenie problemów naukowych poruszanych w naszym projekcie wynika z jego interdyscyplinarnego charakteru. Musimy opracować narzędzia matematyczne do opisywania i rozwiązywania konkretnych problemów biologicznych. Najważniejszym zagadnieniem naszych badań jest znalezienie wyników matematycznych, które można zinterpretować biologicznie i które mogą dostarczyć cennych informacji biologicznych. Zbadanie rozkładu statusu immunologicznego w modelu epidemiologicznym będzie miało istotne znaczenie dla zapobiegania rozprzestrzenianiu się choroby. Znajomość rozkładu statusu immunologicznego może być dobrym wskazaniem do określenia czasu, po upływie którego należy przeprowadzić ponowne szczepienie w celu utrzymania odporności populacji.</p>	<p><b>Planned contribution to the development of the discipline</b> The significance of scientific problems proposed by our project is related to its interdisciplinary character. We need to develop mathematical tools to describe and solve specific biological problems. The most important issue of our research is to find mathematical results which can be biologically interpreted and can provide valuable biological information. Investigating the distribution of immune status in an epidemiological model will be important to prevent the spread of the disease. Knowing the distribution of immune status can be a good guide to determine the time after which revaccination should be applied to maintain population immunity.</p>
<p><b>Opis wymagań – wiedza, umiejętności i kompetencje społeczne kandydata</b> Podstawowym wymaganiem, które musi spełnić kandydat/kandydatka, to ukończenie studiów matematycznych. Temat pracy doktorskiej jest na pograniczu analizy funkcjonalnej, równań różniczkowych i rachunku prawdopodobieństwa, zatem wymagane jest ukończenie tych kursów w ramach studiów matematycznych i zainteresowanie tymi zagadnieniami.</p>	<p><b>Description of requirements – knowledge, skills and social competences of the candidate</b> The basic requirement that candidates must meet is a degree in mathematics. The topic of the doctoral thesis is at the intersection of functional analysis, differential equations and probability theory, so completion of these courses as part of a mathematics degree and an interest in these topics are required.</p>





Matematyka temat nr 2	Mathematics topic No. 2
<b>Asymptotyczne własności modeli populacyjnych</b>	<b>Asymptotic properties of population models</b>
PhD supervisor: <b>dr hab. Katarzyna Pichór, prof. UŚ</b>	
<p><b>Krótką charakterystyka założeń i celów badawczych</b></p> <p>W biologii populacyjnej, populacja jest zazwyczaj niejednorodna. Dlatego ważne jest, aby podzielić ją na jednorodne grupy według pewnych istotnych parametrów, takich jak wiek, wielkość, dojrzałość lub stan proliferacyjny komórek, i badać interakcje między takimi grupami. Modele tego typu nazywane są modelami strukturalnymi i opisują ewolucję w czasie rozkładu populacji zgodnie z ustalonymi parametrami</p> <p>Takie modele są zazwyczaj opisywane przez równania różniczkowe cząstkowe z pewnymi nielokalnymi zaburzeniami i specyficznymi warunkami brzegowymi (zwane równaniami ewolucyjnymi). Drugi typ tych modeli to modele oparte na procesach stochastycznych, takich jak kawałkami deterministyczne procesy Markowa i bardziej zaawansowane procesy semimarkowskie.</p> <p>Nasze cele badawcze to:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1) konstruowanie i badanie modeli populacyjnych,</li><li>2) analiza asymptotycznych własności takich modeli.</li></ol> <p>Naszym celem jest tworzenie nowych modeli zjawisk biologicznych, które pojawiają się w dynamice populacji, biologii molekularnej, oraz dostarczanie nowych narzędzi matematycznych do badania istniejących modeli biologicznych. Naszym celem może być sprawdzenie czy rozwiązania naszego nowego modelu generują ciągłą półgrupę operatorów w pewnej przestrzeni <math>L^1</math> oraz zbadanie długoczasowego zachowania takiej półgrupy. Jednym z zagadnień może być podanie założeń, przy których</p>	<p><b>Brief description of research assumptions and goals</b></p> <p>In population biology, a population is usually heterogeneous. Thus it is important to divide it into homogeneous groups according to some significant parameters such as age, size, maturity, or proliferative state of cells, and to study interactions between such groups. Models of this type are called structured and they describe the time evolution of the distribution of the population according to the fixed parameters. This type of models are usually represented by partial differential equations with some nonlocal perturbations and specific boundary conditions (called evolution equations). The second type of these models are models based on stochastic processes, such as piecewise deterministic Markov processes and more advanced semi-Markov processes</p> <p>Description of the topic and scientific goal of the project</p> <p>Our research objectives are:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1) constructing and studying population models,</li><li>2) analysis of the asymptotic properties of such models.</li></ol> <p>construct new models of biological phenomena which appear in population dynamics, molecular biology, to provide new mathematical tools to study existing biological models.</p> <p>Our goal may be to check whether the solutions of our new model generate a continuous semigroup of operators in a certain <math>L^1</math> space and studying the long-term behavior of such a semigroup. One of the issues may be to specify the assumptions under which this semigroup will have asynchronous</p>





<p>półgrupa ta będzie miała asynchroniczny wzrost wykładniczy. Strukturalne modele populacyjne można też badać przy pomocy pewnego uogólnienia procesów semimarkowowskich. Przy takim podejściu można również skonstruować półgrupę operatorów dodatnich na przestrzeni funkcji całkowalnych związaną z tym modelem i badać długoterminowe zachowanie rozwiązań stochastycznego modelu wzrostu populacji.</p>	<p>exponential growth. Structural population models can also be studied using a generalization of semi-Markov processes. With this approach, it is also possible to construct a semigroup of positive operators on the space of integrable functions associated with this model and study the long-term behavior of solutions of the stochastic population growth model.</p>
<p><b>Planowany wkład w rozwój dyscypliny</b> Najważniejszym zagadnieniem naszych badań jest znalezienie wyników matematycznych, które można zinterpretować biologicznie i które mogą dostarczyć cennych informacji biologicznych. Na przykład zastosowanie uogólnionych modeli semimarkowowskich w opisie procesów biologicznych ma przewagę nad modelami Markowa, ponieważ funkcje w nich zawarte można łatwo zweryfikować eksperymentalnie. Na przykład w modelu populacji komórkowej o strukturze wielkościowej wykorzystujemy rozkład długości cyklu komórkowego zamiast trudnej do zmierzenia szybkości podziału. Procesy te mają znacznie szersze zastosowanie, prowadzą do powstania trudnych do zbadania obiektów matematycznych i wymuszają opracowanie nowych technik badawczych.</p>	<p><b>Planned contribution to the development of the discipline</b> The most important issue in our research is to find mathematical results that can be interpreted biologically and that can provide valuable biological information. For example, the use of generalized semi-Markov models in the description of biological processes has the advantage over Markov models that the functions in them can be easily verified experimentally. For example, in the size-structured cellular population model we use the distribution of the cell cycle length instead of the rate of division, which is difficult to measure. These processes have a much broader field of application, lead to mathematical objects difficult to study and force the development of new research techniques.</p>
<p><b>Opis wymagań – wiedza, umiejętności i kompetencje społeczne kandydata</b> Podstawowym wymaganiem, które musi spełnić kandydat/kandydatka, to ukończenie studiów matematycznych. Temat pracy doktorskiej jest na pograniczu analizy funkcjonalnej, równań różniczkowych, rachunku prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych, zatem wymagane jest ukończenie tych kursów w ramach studiów matematycznych i zainteresowanie tymi zagadnieniami.</p>	<p><b>Description of requirements – knowledge, skills and social competences of the candidate</b> The basic requirement that candidates must meet is a degree in mathematics. The topic of the doctoral thesis is at the intersection of functional analysis, differential equations, probability theory, and stochastic processes, so completion of these courses as part of a mathematics degree and an interest in these topics are required.</p>





Matematyka temat nr 3	Mathematics topic No. 3
<b>Efektywne obliczanie modułu różniczek Kählera</b>	<b>Efficient computation the module of Kähler differentials</b>
PhD supervisor: <b>dr hab. Przemysław Koprowski, prof. UŚ</b>	
<b>Krótką charakterystyka założeń i celów badawczych</b> Niech $(L/K, v)$ będzie rozszerzeniem obliczalnych ciał z waluacją. Celem projektu jest opracowanie efektywnych jawnych metod wyznaczania modułu różniczek Kählera stowarzyszonych pierścieni waluacyjnych.	<b>Brief description of research assumptions and goals</b> Let $(L/K, v)$ be a an extension of computable valued fields. The goal of this project is to find efficient explicit methods for constructing the module of Kähler differentials for the induced extension of the valuation rings of $K$ and $L$ .
<b>Planowany wkład w rozwój dyscypliny</b> Jedyne znane algorytmiczne metody konstrukcji modułów różniczek Kählera działają wyłącznie w odniesieniu do globalnych ciał funkcyjnych. Zatem jest wysoce pożądane aby opracować metody działające nad innymi klasami ciał z waluacją.	<b>Planned contribution to the development of the discipline</b> The only known algorithmic methods for constructing modules of Kähler differentials work exclusively over global function fields. Hence, it is highly desirable to introduce methods that work over other classes of valued fields.
<b>Opis wymagań – wiedza, umiejętności i kompetencje społeczne kandydata</b> Warunkiem wstępnym wymaganym w projekcie są solidne podstawy algebry przemiennej (pierścienie, moduły, podstawy teorii waluacji).	<b>Description of requirements – knowledge, skills and social competences of the candidate</b> A prerequisite for this project is a solid background in commutative algebra (rings, modules, basics of the valuation theory).





Matematyka temat nr 4	Mathematics topic No. 4
<b>Modelowanie matematyczne ekspresji genów</b>	<b>Mathematical modelling of gene expression</b>
PhD supervisor: <b>dr hab. Katarzyna Pichór, prof. UŚ</b>	
<b>Krótką charakterystyka założeń i celów badawczych</b> Ekspresja genów jest złożonym procesem, który obejmuje trzy procesy: aktywację/inaktywację genów, transkrypcję/rozpad mRNA oraz translację/rozpad białek. Opis takich procesów jest dość skomplikowany, ponieważ wiąże się z różnymi mechanizmami matematycznymi, takimi jak zmiana dynamiki spowodowana włączaniem i wyłączaniem genów oraz zależność od określonych wartości progowych wytwarzanych biomolekuł. Nasze cele badawcze to: 1) zbadanie niektórych sieci regulacji genów, opisujących interakcje między genami podczas procesu produkcji białek i cząsteczek RNA. 2) zastosowanie technik opartych na procesach stochastycznych w modelowaniu ekspresji genów. Modelowanie matematyczne ekspresji genów lub sieci regulacji genów jest trudnym problemem. Realistyczne wydają się tutaj modele oparte na kawałkami deterministycznych procesach Markowa oraz układach równań różniczkowych cząstkowych opisujących rozkłady tych procesów.	<b>Brief description of research assumptions and goals</b> Gene expression is a complex process which involves three processes: gene activation/inactivation, mRNA transcription/decay and protein translation/decay. The description of such processes is quite complicated because there are various mathematical mechanisms involved, such as the change in dynamics caused by the switching on and off of genes and dependence on certain threshold values of the biomolecules produced. Our research objectives are: 1) the study of gene regulatory networks, describing interactions between genes during the production of proteins and RNA molecules, 2) the use of techniques based on stochastic processes in modeling of gene expression. Mathematical modelling of gene expression or gene regulatory networks is a challenging problem. Models based on piecewise deterministic Markov processes and systems of partial differential equations describing the distributions of these processes seem realistic here.
<b>Planowany wkład w rozwój dyscypliny</b> Musimy opracować narzędzia matematyczne do opisywania i rozwiązywania konkretnych problemów biologicznych. Chcemy przedstawić ogólne twierdzenia matematyczne, które można bezpośrednio zastosować do badanych problemów. Jednocześnie badanie modeli biologicznych ma inspirujący wpływ na rozwój nowych metod matematycznych. Chcemy również zbadać właściwości procesów semimarkowowskich z losowymi skokami, które pojawiają się w wielu zastosowaniach, w tym również w modelowaniu	<b>Planned contribution to the development of the discipline</b> We need to develop mathematical tools to describe and solve specific biological problems. We want to give general mathematical theorems that can be directly applied to the problems under study. At the same time, the study of biological models has an inspiring effect on the development of new mathematical methods. We also want to study properties of semi-Markov processes with random jumps which appear in many applications, including modeling





<p>ekspresji genów. Użycie procesów semimarkowskich i zbadanie ich własności stanowiłoby duży wkład w rozwój tej dyscypliny.</p>	<p>gene expression and systems of partial differential equations describing the distributions of these processes. The use of semi-Markov processes and the study of their properties would be a major contribution to the development of this discipline.</p>
<p><b>Opis wymagań – wiedza, umiejętności i kompetencje społeczne kandydata</b> Podstawowym wymaganiem, które musi spełnić kandydat/kandydatka, to ukończenie studiów matematycznych. Temat pracy doktorskiej jest na pograniczu analizy funkcjonalnej, równań różniczkowych i rachunku prawdopodobieństwa, zatem wymagane jest ukończenie tych kursów w ramach studiów matematycznych i zainteresowanie tymi zagadnieniami.</p>	<p><b>Description of requirements – knowledge, skills and social competences of the candidate</b> The basic requirement that candidates must meet is a degree in mathematics. The topic of the doctoral thesis is at the intersection of functional analysis, differential equations and probability theory, so completion of these courses as part of a mathematics degree and an interest in these topics are required.</p>





Matematyka temat nr 5	Mathematics topic No. 5
<b>Własności ergodyczne wybranych klas niestacjonarnych markowowskich układów dynamicznych</b>	<b>Ergodic properties of selected classes of non-stationary Markov dynamical systems</b>
PhD supervisor: <b>dr hab. Hanna Wojewódka-Ściążko, prof. UŚ</b> <a href="http://www.linkedin.com/in/hanna-wojewodka-sciazko-05228910a">www.linkedin.com/in/hanna-wojewodka-sciazko-05228910a</a>	
<b>Krótką charakterystyką założeń i celów badawczych</b> Markowowskie układy dynamiczne (MUD) mają szerokie zastosowania: w teorii iterowanych układów funkcyjnych i fraktali [Barnsley & Demko, 1985; Diaconis & Freedman, 1999], równań różniczkowych cząstkowych [Hairer, 2002], modelowaniu ruchu internetowego [Graham & Robert, 2009], a także w biologii - jako modele stochastyczne dynamiki molekularnej, m.in. ekspresji i autoregulacji genów [Hille et al., 2016] czy podziału komórek [Lasota & Mackey, 1999]. Projekt koncentruje się na wybranych własnościach ergodycznych MUD, w tym zależnościach pomiędzy równością a asymptotyczną stabilnością opisujących je procesów Markowa, oraz na wykazaniu twierdzeń granicznych dla wybranych modeli stochastycznych, interesujących także z punktu widzenia ich zastosowań. Istnienie i jedyność rozkładów stacjonarnych procesów Markowa, a także słaba zbieżność rozkładów tych procesów do rozkładów stacjonarnych niezależnie od rozkładów początkowych (asymptotyczna stabilność), od lat są przedmiotem badań. Opracowano liczne techniki, głównie oparte na równości (ang. equicontinuity) rodzin operatorów Markowa, przy czym asymptotyczna stabilność w ogólności nie musi implikować równości [Hille et al., 2017]. Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, że choć asymptotyczna stabilność jest jedną z najbardziej pożądanymi własnościami, to dopiero jej łączne występowanie z tzw. e-własnością pozwala traktować pewne błędy numeryczne w symulacjach jako pomijalne [Kukulski & Wojewódka-Ściążko, 2021; 2024] (zob. również	<b>Brief description of research assumptions and goals</b> Markov dynamical systems (MDS) have many applications: in the theory of iterated function systems and fractals [Barnsley & Demko, 1985; Diaconis & Freedman, 1999], partial differential equations [Hairer, 2002], internet traffic modeling [Graham & Robert, 2009], as well as in biology, where they serve as stochastic models of molecular dynamics, including gene expression and autoregulation [Hille et al., 2016] or cell division [Lasota & Mackey, 1999]. The project focuses on selected ergodic properties of MDSs, in particular on the relationship between equicontinuity and asymptotic stability of the associated Markov processes, as well as on establishing limit theorems for selected stochastic models that are also relevant from the viewpoint of applications. The existence and uniqueness of stationary distributions of Markov processes, together with weak convergence of their distributions to stationary ones independently of initial distributions (asymptotic stability), have been intensively studied for many years. Numerous techniques have been developed, largely based on equicontinuity of families of Markov operators. It is, however, important to emphasize that asymptotic stability does not, in general, imply equicontinuity [Hille et al., 2017]. Moreover, although asymptotic stability is among the most desirable ergodic properties, only its joint occurrence with the so-called e-property allows certain numerical errors arising in simulations to be treated as negligible [Kukulski & Wojewódka-Ściążko, 2021; 2024] (cf. [Czapla & Horbach, 2014],





[Czapla & Horbach, 2014], gdzie wykazano, że asymptotycznie stabilny operator Markowa zbiega do swojego rozkładu stacjonarnego w sposób jednostajny, o ile spełnia on odpowiedni warunek równości.

Prawo iterowanego logarytmu (PIL) jest trzecim fundamentalnym twierdzeniem granicznym obok mocnego prawa wielkich liczb (MPWL) i centralnego twierdzenia granicznego (CTG). Poprawia tempo zbieżności (w porównaniu z tym wynikającym z MPWL) z rzędu  $O(t)$  do rzędu  $O(\ln(\ln(t)))$  oraz ilustruje różnicę pomiędzy twierdzeniami formułowanymi w kategoriach zbieżności z prawdopodobieństwem 1 a rezultatami dotyczącymi zbieżności według rozkładu - takimi jak CTG.

#### CELE BADAWCZE:

(I) Wykazanie PIL dla MUD z deterministyczną ewolucją przerywaną losowymi skokami. Losowość kryje się zarówno w momentach występowania nieciągłości (czas między skokami opisuje rozkład wykładniczy), jak i w wyborze potoków opisujących deterministyczną ewolucję układu po skokach. Układ może modelować ekspresję genu lub opisywać rozwiązania poissonowskich stochastycznych równań różniczkowych [Czapla et al., 2022]. Trudności: badany MUD jest niestacjonarny, tzn. jego rozkład początkowy może być dowolną miarą probabilistyczną; ponadto jego przestrzeń stanów jest ogólną, a więc niekoniecznie zwartą, przestrzenią metryczną (zakładamy wyłącznie jej ośrodkowość i zupełność - przestrzeń polska). Warto znać: [Czapla et al., 2021; 2024; 2026; Komorowski & Szarek, 2014].

(II) Wykazanie PIL dla MUD wyznaczanych przez ciągłe, nieodwracalne przekształcenia odcinka  $[0,1]$ , analizowanych w [Hille et al., 2025] m.in. pod kątem asymptotycznej stabilności oraz CTG. Układy tego typu są badane od lat [Alseda & Misiurewicz, 2014; Homburg et al., 2022; Alsmeyer et al., 2023], przy czym większość prac zakłada odwracalność odwzorowań, co umożliwia zastosowanie pewnych klasycznych narzędzi probabilistycznych, w połączeniu z metodami z teorii układów dynamicznych [Hille et al., 2025]. Trudność: badany MUD wyznaczony jest przez odwzorowania

where it is shown that an asymptotically stable Markov operator converges uniformly to its stationary distribution provided an appropriate equicontinuity condition holds).

The law of the iterated logarithm (LIL) constitutes the third fundamental limit theorem, alongside the strong law of large numbers (SLLN) and the central limit theorem (CLT). It refines the convergence rate obtained in the SLLN from order  $O(t)$  to  $O(\ln(\ln(t)))$ , and highlights the distinction between almost sure convergence and convergence in distribution, characteristic of results such as the CLT.

#### RESEARCH OBJECTIVES:

(I) Establishing the LIL for an MDS whose deterministic evolution is punctuated by random jumps. Randomness is present both in the jump times (jumps arrive according to a Poisson process) and in the selection of the flows describing the deterministic evolution between jumps. Such systems may model gene expression dynamics or describe solutions to Poisson-driven stochastic differential equations [Czapla et al., 2022]. Difficulties: the considered MDS is non-stationary, meaning that its initial distribution may be an arbitrary probability measure; moreover, its state space is a general (not necessarily compact) metric space (only separability and completeness are assumed). Worth reading: [Czapla et al., 2021; 2024; 2026; Komorowski & Szarek, 2014].

(II) Establishing the LIL for MDSs generated by continuous, non-invertible transformations of the interval  $[0,1]$ , studied in [Hille et al., 2025] in terms of asymptotic stability and the CLT. Similar systems have been investigated for years [Alseda & Misiurewicz, 2014; Homburg et al., 2022; Alsmeyer et al., 2023]. In most existing works, however, the generating transformations are assumed to be invertible, which enables the use of classical probabilistic tools combined with methods from dynamical systems theory [Hille et al., 2025]. Difficulty: the non-invertibility of the mappings generating the considered MDS. Worth reading: [Czudek et al., 2021; Łuczyńska & Szarek, 2022].

(III) Replacing, in the theorems of [Hille et al., 2017; Kukulski & Wojewódka-Ściążko, 2024], the assumption that the support of the unique invariant probability measure has non-empty





nieodwracalne. Warto znać: [Czudek et al., 2021; Łuczyńska & Szarek, 2022].

(III) Zastąpienie w twierdzeniach z [Hille et al., 2017; Kukulski & Wojewódka-Ściążko, 2024] założenia o niepustości wnętrza nośnika jedynej niezmienniczej miary probabilistycznej danego operatora/ półgrupy Markowa warunkiem mniej restrykcyjnym i łatwiejszym do weryfikacji. Taki wynik odpowiadałby potrzebom polskich probabilistów badających modele, dla których dotychczasowy warunek nie jest spełniony.

interior by a less restrictive and more easily verifiable condition. Such a result would address needs expressed by Polish probabilists studying stochastic models for which the original assumption cannot be met.

#### Planowany wkład w rozwój dyscypliny

Planowane badania będą dotyczyć analizy ergodycznej wybranych klas niestacjonarnych markowowskich układów dynamicznych. Tematyka ta lokuje się na styku teorii prawdopodobieństwa, teorii procesów stochastycznych oraz teorii ergodycznej, i stanowi przedmiot intensywnych badań we współczesnej matematyce - zarówno ze względu na istotne problemy teoretyczne, jak i na liczne zastosowania modeli markowowskich, m.in. w opisie dynamiki zjawisk biologicznych.

W badaniach nad procesami Markowa kluczowe znaczenie ma opis ich zachowania asymptotycznego, rozumianego jako własności ujawniające się w długim horyzoncie czasowym, tj. w granicy przy czasie dążącym do nieskończoności. Obejmuje on w szczególności zagadnienia istnienia i jedyności rozkładów stacjonarnych, oszacowania tempa zbieżności do tych rozkładów, różne formy asymptotycznej stabilności oraz związane z nimi twierdzenia graniczne. Pomimo bardzo rozwiniętej teorii i licznych znanych rezultatów, wciąż istnieje wiele problemów otwartych - zarówno dla konkretnych modeli stochastycznych, jak i w ujęciach ogólnych, obejmujących m.in. niestacjonarne procesy Markowa o ogólnej przestrzeni stanów.

Planowany projekt badawczy zmierza do pogłębienia wiedzy na temat własności ergodycznych istotnych klas markowowskich układów dynamicznych. Badania będą prowadzone w możliwie ogólnym ujęciu, bez silnych założeń dotyczących rozkładów początkowych (w szczególności dopuszczalne będą rozkłady początkowe niestacjonarne) oraz bez konieczności przyjmowania zwartości przestrzeni stanów. Takie

#### Planned contribution to the development of the discipline

The planned research will focus on the ergodic analysis of selected classes of non-stationary Markov dynamical systems. This topic lies at the intersection of probability theory, the theory of stochastic processes, and ergodic theory, and remains an active area of research in contemporary mathematics, motivated both by fundamental theoretical questions and by numerous applications, including the modeling of biological dynamics.

In the study of Markov processes, a central role is played by the description of their asymptotic behavior, understood as properties emerging in the long-time regime, that is, in the limit as time tends to infinity. In particular, this includes problems concerning the existence and uniqueness of stationary measures, rates of convergence to these distributions, various notions of asymptotic stability, as well as related limit theorems. Despite the maturity of the theory and the abundance of known results, many problems still remain open - both for specific stochastic models and within general frameworks encompassing non-stationary Markov processes with general state spaces.

The planned research project aims to deepen the understanding of ergodic properties of certain classes of Markov dynamical systems. The analysis will be conducted in a possibly general setting, without strong assumptions on initial distributions (in particular, allowing for non-stationary initial measures) and without the need to impose compactness of the state space. Such an approach makes it possible to cover a broad class of models





<p>podejście pozwala objąć analizą szeroką klasę modeli i sprzyja formułowaniu wyników o potencjalnie dużej uniwersalności. Oczekiwane rezultaty będą miały charakter teoretyczny. Jednocześnie przyjmowane założenia będą formułowane w sposób umożliwiający ich weryfikację w konkretnych modelach, co ma istotne znaczenie z punktu widzenia potencjalnych zastosowań w matematyce stosowanej, biomatematyce, fizyce matematycznej oraz informatyce.</p>	<p>and facilitates the formulation of results with wide applicability. The expected outcomes will be of a theoretical nature. At the same time, the assumptions adopted in the analysis will be formulated in a way that allows their verification in concrete models, which is essential from the perspective of potential applications in applied mathematics, biomathematics, mathematical physics, and computer science.</p>
<p><b>Opis wymagań – wiedza, umiejętności i kompetencje społeczne kandydata</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Biegłość w posługiwaniu się pojęciami, metodami oraz twierdzeniami z zakresu zaawansowanego rachunku prawdopodobieństwa i analizy stochastycznej.</li><li>2. Znajomość podstawowych pojęć oraz narzędzi teorii operatorów i półgrup Markowa.</li><li>3. Umiejętność samodzielnego czytania ze zrozumieniem artykułów naukowych z zakresu probabilistyki oraz zagadnień związanych z teorią układów dynamicznych.</li><li>4. Umiejętność redagowania poprawnych i precyzyjnych tekstów matematycznych, w szczególności o charakterze naukowym.</li><li>5. Dobra znajomość języka angielskiego, umożliwiająca korzystanie z literatury fachowej oraz przygotowywanie publikacji naukowych.</li><li>6. Umiejętność efektywnej pracy zespołowej oraz komunikacji w środowisku badawczym.</li></ol>	<p><b>Description of requirements – knowledge, skills and social competences of the candidate</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Proficiency in the use of concepts, methods, and theorems from advanced probability theory and stochastic analysis.</li><li>2. Familiarity with fundamental concepts and tools from the theory of Markov operators and semigroups.</li><li>3. Ability to read and understand scientific articles in probability theory and in topics related to dynamical systems.</li><li>4. Ability to write clear, precise, and mathematically rigorous texts, in particular of a scientific nature.</li><li>5. Good command of the English language, enabling effective use of the scientific literature and preparation of research publications.</li><li>6. Ability to work effectively in a team and to communicate within a research environment.</li></ol>

