UNIVERSITY OF SILESIA
IN KATOWICE

Rekrutacja do Szkoły Doktorskiej w Uniwersytecie Śląskim w Katowicach na rok akademicki 2026/2027

Admission to the Doctoral School at the University of Silesia in Katowice for academic year 2026/2027

Matematyka temat nr 5	Mathematics topic No. 5
Własności ergodyczne wybranych klas niestacjonarnych markowowskich układów dynamicznych	**Ergodic properties of selected classes of non-stationary Markov dynamical systems**
PhD supervisor: **dr hab. Hanna Wojewódka-Ściążko, prof. UŚ** www.linkedin.com/in/hanna-wojewódka-ściążko-05228910a	
Krótka charakterystyka założeń i celów badawczych Markowowskie układy dynamiczne (MUD) mają szerokie zastosowania: w teorii iterowanych układów funkcyjnych i fraktali [Barnsley & Demko, 1985; Diaconis & Freedman, 1999], równań różniczkowych cząstkowych [Hairer, 2002], modelowaniu ruchu internetowego [Graham & Robert, 2009], a także w biologii - jako modele stochastyczne dynamiki molekularnej, m.in. ekspresji i autoregulacji genów [Hille et al., 2016] czy podziału komórek [Lasota & Mackey, 1999]. Projekt koncentruje się na wybranych własnościach ergodycznych MUD, w tym zależnościach pomiędzy równociągłością a asymptotyczną stabilnością opisujących je procesów Markowa, oraz na wykazaniu twierdzeń granicznych dla wybranych modeli stochastycznych, interesujących także z punktu widzenia ich zastosowań. Istnienie i jedyność rozkładów stacjonarnych procesów Markowa, a także słaba zbieżność rozkładów tych procesów do rozkładów stacjonarnych niezależnie od rozkładów początkowych (asymptotyczna stabilność), od lat są przedmiotem badań. Opracowano liczne techniki, głównie oparte na równociągłości (ang. equicontinuity) rodzin operatorów Markowa, przy czym asymptotyczna stabilność w ogólności nie musi implikować równociągłości [Hille et al., 2017]. Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, że choć asymptotyczna stabilność jest jedną z najbardziej	**Brief description of research assumptions and goals** Markov dynamical systems (MDS) have many applications: in the theory of iterated function systems and fractals [Barnsley & Demko, 1985; Diaconis & Freedman, 1999], partial differential equations [Hairer, 2002], internet traffic modeling [Graham & Robert, 2009], as well as in biology, where they serve as stochastic models of molecular dynamics, including gene expression and autoregulation [Hille et al., 2016] or cell division [Lasota & Mackey, 1999]. The project focuses on selected ergodic properties of MDSs, in particular on the relationship between equicontinuity and asymptotic stability of the associated Markov processes, as well as on establishing limit theorems for selected stochastic models that are also relevant from the viewpoint of applications. The existence and uniqueness of stationary distributions of Markov processes, together with weak convergence of their distributions to stationary ones independently of initial distributions (asymptotic stability), have been intensively studied for many years. Numerous techniques have been developed, largely based on equicontinuity of families of Markov operators. It is, however, important to emphasize that asymptotic stability does not, in general, imply equicontinuity [Hille et al., 2017]. Moreover, although asymptotic stability is among the most

University of Silesia in Katowice
Doctoral School
Bankowa 14, 40-007 Katowice, Poland
e-mail: szkola.doktorska@us.edu.pl

pożądanych własności, to dopiero jej łączne występowanie z tzw. e-własnością pozwala traktować pewne błędy numeryczne w symulacjach jako pomijalne [Kukulski & Wojewódka-Ściążko, 2021; 2024] (zob. również [Czapla & Horbacz, 2014], gdzie wykazano, że asymptotycznie stabilny operator Markowa zbiega do swojego rozkładu stacjonarnego w sposób jednostajny, o ile spełnia on odpowiedni warunek równociągłości). Prawo iterowanego logarytmu (PIL) jest trzecim fundamentalnym twierdzeniem granicznym obok mocnego prawa wielkich liczb (MPWL) i centralnego twierdzenia granicznego (CTG). Poprawia tempo zbieżności (w porównaniu z tym wynikającym z MPWL) z rzędu O(t) do rzędu O(ln(ln(t))) oraz ilustruje różnicę pomiędzy twierdzeniami formułowanymi w kategoriach zbieżności z prawdopodobieństwem 1 a rezultatami dotyczącymi zbieżności według rozkładu - takimi jak CTG. CELE BADAWCZE: (I) Wykazanie PIL dla MUD z deterministyczną ewolucją przerywaną losowymi skokami. Losowość kryje się zarówno w momentach występowania nieciągłości (czas między skokami opisuje rozkład wykładniczy), jak i w wyborze potoków opisujących deterministyczną ewolucję układu po skokach. Układ może modelować ekspresję genu lub opisywać rozwiązania poissonowskich stochastycznych równań różniczkowych [Czapla et al., 2022]. Trudności: badany MUD jest niestacjonarny, tzn. jego rozkład początkowy może być dowolną miarą probabilistyczną; ponadto jego przestrzeń stanów jest ogólną, a więc niekoniecznie zwartą, przestrzenią metryczną (zakładamy wyłącznie jej ośrodkowość i zupełność - przestrzeń polska). Warto znać: [Czapla et al., 2021; 2024; 2026; Komorowski & Szarek, 2014]. (II) Wykazanie PIL dla MUD wyznaczanych przez ciągłe, nieodwracalne przekształcenia odcinka [0,1], analizowanych w [Hille et al., 2025] m.in. pod kątem asymptotycznej stabilności oraz CTG. Układy tego typu są badane od lat [Alseda & Misiurewicz, 2014; Homburg et al., 2022; Alsmeyer et al., 2023], przy czym większość prac zakłada odwracalność odwzorowań, co umożliwia zastosowanie pewnych	desirable ergodic properties, only its joint occurrence with the so-called e-property allows certain numerical errors arising in simulations to be treated as negligible [Kukulski & Wojewódka-Ściążko, 2021; 2024] (cf. [Czapla & Horbacz, 2014], where it is shown that an asymptotically stable Markov operator converges uniformly to its stationary distribution provided an appropriate equicontinuity condition holds). The law of the iterated logarithm (LIL) constitutes the third fundamental limit theorem, alongside the strong law of large numbers (SLLN) and the central limit theorem (CLT). It refines the convergence rate obtained in the SLLN from order O(t) to O(ln(ln(t))), and highlights the distinction between almost sure convergence and convergence in distribution, characteristic of results such as the CLT. RESEARCH OBJECTIVES: (I) Establishing the LIL for an MDS whose deterministic evolution is punctuated by random jumps. Randomness is present both in the jump times (jumps arrive according to a Poisson process) and in the selection of the flows describing the deterministic evolution between jumps. Such systems may model gene expression dynamics or describe solutions to Poisson-driven stochastic differential equations [Czapla et al., 2022]. Difficulties: the considered MDS is non-stationary, meaning that its initial distribution may be an arbitrary probability measure; moreover, its state space is a general (not necessarily compact) metric space (only separability and completeness are assumed). Worth reading: [Czapla et al., 2021; 2024; 2026; Komorowski & Szarek, 2014]. (II) Establishing the LIL for MDSs generated by continuous, non-invertible transformations of the interval [0,1], studied in [Hille et al., 2025] in terms of asymptotic stability and the CLT. Similar systems have been investigated for years [Alseda & Misiurewicz, 2014; Homburg et al., 2022; Alsmeyer et al., 2023]. In most existing works, however, the generating transformations are assumed to be invertible, which enables the use of classical probabilistic tools combined with methods from dynamical systems theory [Hille et al., 2025]. Difficulty: the non-invertibility of the mappings

klasycznych narzędzi probabilistycznych, w połączeniu z metodami z teorii układów dynamicznych [Hille et al., 2025]. Trudność: badany MUD wyznaczony jest przez odwzorowania nieodwracalne. Warto znać: [Czudek et al., 2021; Łuczyńska & Szarek, 2022]. (III) Zastąpienie w twierdzeniach z [Hille et al., 2017; Kukulski & Wojewódka-Ściążko, 2024] założenia o niepustości wnętrza nośnika jedynej niezmienniczej miary probabilistycznej danego operatora/ półgrupy Markowa warunkiem mniej restrykcyjnym i łatwiejszym do weryfikacji. Taki wynik odpowiadałby potrzebom polskich probabilistów badających modele, dla których dotychczasowy warunek nie jest spełniony.	generating the considered MDS. Worth reading: [Czudek et al., 2021; Łuczyńska & Szarek, 2022]. (III) Replacing, in the theorems of [Hille et al., 2017; Kukulski & Wojewódka-Ściążko, 2024], the assumption that the support of the unique invariant probability measure has non-empty interior by a less restrictive and more easily verifiable condition. Such a result would address needs expressed by Polish probabilists studying stochastic models for which the original assumption cannot be met.