Załącznik do ogłoszenia Dyrektora
Instytutu Matematyki z dnia
04.05.2026

# ZAKRES MERYTORYCZNY ROZMOWY KWALIFIKACYJNEJ PRZY REKRUTACJI DO SZKOŁY DOKTORSKIEJ UŚ W DYSCYPLINIE MATEMATYKA

**Wersja polska**

## 1. Algebra

- Teoria grup: grupy, podgrupy, homomorfizmy grup, podgrupy normalne, grupy ilorazowe, twierdzenia o izomorfizmie, klasyczne przykłady grup, grupy permutacji.
- Teoria pierścieni: pierścienie, podpierścienie, ideały, ideały główne, ideały pierwsze i maksymalne, pierścienie całkowite, pierścienie euklidesowe i pierścienie ideałów głównych, pierścienie z jednoznacznym rozkładem, pierścienie lokalne i lokalizacja względem ideału, pierścienie wielomianów.
- Teoria ciał: ciała i podciała, rozszerzenia ciał, rozszerzenia skończone i algebraiczne, elementy algebraiczne, wielomian minimalny elementu algebraicznego, ciało rozkładu wielomianu, ciała algebraicznie domkniecie, ciała skończone, grupa multiplikatywna ciała skończonego.
- Algebra liniowa: moduły i podmoduły, moduły ilorazowe, homomorfizmy modułów, moduły wolne i przestrzenie liniowe, baza, rząd modułu i wymiar przestrzeni liniowej, moduły projektywne, wartości i wektory własne, wyznacznik i wielomian charakterystyczny.
- Algebra homologiczna: kompleksy modułów i ciągi dokładne, moduły łańcuchów, homomorfizmy brzegowe, moduły brzegów i cykli, moduły homologii.

## 2. Analiza funkcjonalna

- Przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha, przykłady.
- Operatory liniowe przestrzeni unormowanych, funkcjonały liniowe i ciągłe, norma w przestrzeni $L(X, Y)$. Przestrzeń sprzężona do przestrzeni unormowanej.
- Twierdzenie Hahna-Banacha i jego konsekwencje.
- Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym, twierdzenie o domkniętym wykresie. Twierdzenie Banacha-Steinhausa.
- Przestrzenie unitarne i przestrzenie Hilberta, przykłady. Warunek równoległoboku, nierówność Cauchy'ego-Schwarza.
- Prostopadłość i rzutowanie prostopadłe. Twierdzenie o zbiorze wypukłym i rzucie prostopadłym. Dopełnienie ortogonalne.
- Twierdzenie Riesza o postaci ciągłych funkcjonałów liniowych w przestrzeni Hilberta, przestrzeń sprzężona.
- Układy ortonormalne i szeregi Fouriera w przestrzeni Hilberta. Układ trygonometryczny i jego zupełność.

## 3. Matematyka obliczeniowa

- Arytmetyka wielomianowa: algorytmy szybkiego mnożenia, dzielenie i pseudodzielenie wielomianów, algorytm Euklidesa i jego warianty, tożsamość Bézouta.
- Algorytmy macierzowe: szybkie mnożenie macierzy, wyznaczanie wartości i wektorów własnych, diagonalizacja i jej zastosowanie do potęgowania macierzowego, szybkie obliczanie wyznacznika, algorytmy obliczania wyznacznika bez dzielenia.
- Rozkład bezkwadratowy wielomianu i jego zastosowania, całkowanie symboliczne funkcji wymiernych.
- Szacowanie i izolacja pierwiastków wielomianów, oszacowania górne i dolne pierwiastków wielomianów (np. wzory Cauchy'ego, oszacowanie Honga, twierdzenie Laguerre'a–Samuelsona), twierdzenie Sturma, zasada znaków Kartezjusza.
- Jawne wzory na pierwiastki wielomianów niskich stopni, twierdzenie Abela–Ruffiniego.
- Aproksymacja pierwiastków wielomianów: metody bisekcji i Newtona–Raphsona, inne metody aproksymacji pierwiastków (np. metoda regula falsi, siecznych, Laguerre'a, algorytm QIR).
- Rugownik dwóch wielomianów, wzór Sylvestera, związek z algorytmem Euklidesa, związek pomiędzy rugownikiem a macierzą stowarzyszoną, twierdzenia o eliminacji i przedłużaniu.
- Wyróżnik wielomianu jednej zmiennej.
- Bazy Gröbnera: porządki jednomianowe, $S$-wielomiany i kryterium Buchbergera, algorytm Buchbergera, minimalne i zredukowane bazy Gröbnera, eliminacja z użyciem baz Gröbnera.

## 4. Rachunek prawdopodobieństwa

- Elementy kombinatoryki.
- Aksjomatyka przestrzeni probabilistycznej.
- Modele prawdopodobieństwa klasycznego i geometrycznego.
- Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór na prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa.
- Niezależność zdarzeń i klas zdarzeń, lemat Borela–Cantellego, prawo $0-1$ Kołmogorowa.
- Zmienne losowe, ich rozkłady, dystrybuanty i gęstości, przykłady rozkładów dyskretnych i ciągłych.
- Charakterystyki liczbowe zmiennych losowych: wartość oczekiwana, wariancja, odchylenie standardowe, momenty.
- Funkcje tworzące i ich zastosowania.
- Nierówności probabilistyczne: Markowa, Czebyszewa-Bienaymé i Höldera.
- Wektory losowe, rozkłady wielowymiarowe, rozkłady brzegowe, niezależność zmiennych losowych.
- Kowariancja, macierz kowariancji, współczynnik korelacji.
- Wielowymiarowy rozkład normalny.
- Funkcja charakterystyczna i jej własności.
- Różne rodzaje zbieżności zmiennych losowych: zbieżność prawie na pewno, według prawdopodobieństwa, według rozkładu oraz zależności między nimi.
- Związek między zbieżnością według rozkładu a punktową zbieżnością funkcji charakterystycznych.
- Twierdzenia graniczne: centralne twierdzenie graniczne, prawa wielkich liczb.
- Warunkowa wartość oczekiwana.

- Martyngały z czasem dyskretnym.
- Dyskretne łańcuchy Markowa.

## 5. Równania różniczkowe

- Istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego: twierdzenia Peano, Picarda, Cauchy'ego, metoda łamanych Eulera i metoda kolejnych przybliżeń. Zależność od warunków początkowych i parametrów, rozwiązania wysycone. Twierdzenie Cauchy'ego-Kowalewskiej dla równań różniczkowych cząstkowych.
- Układy liniowych równań różniczkowych I rzędu: rozwiązania fundamentalne, wzór Liouville'a, formuła uzmienniania stałych, układy o stałych współczynnikach.
- Równania różniczkowe liniowe wyższych rzędów.
- Punkty krytyczne układów autonomicznych: stabilność Lapunowa rozwiązań, portrety fazowe na płaszczyźnie, twierdzenie Grobmana-Hartmana, kryteria Lapunowa o stabilności.
- Równania eliptyczne: równanie Laplace'a, rozwiązanie podstawowe, funkcje harmoniczne, zasady maksimum i jednoznaczność rozwiązań zadania Dirichleta, nierówność Harnacka, równanie Poissona, formuła reprezentacyjna Greena, wzór Poissona dla kuli, wartości własne symetrycznych operatorów eliptycznych.
- Równania paraboliczne: równanie przewodnictwa cieplnego, rozwiązanie podstawowe, rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego, zasada maksimum i jednoznaczność rozwiązań zadania Dirichleta, metoda rozdzielania zmiennych, transformacja Fouriera.
- Równania hiperboliczne: równanie falowe, wzór d'Alemberta, wzór Kirchhoffa.
- Przestrzenie Sobolewa: słabe pochodne, nierówności Poincarégo, Gagliardo-Nirenberga i Morreya, zanurzenia Sobolewa, twierdzenie Rellicha-Kondraszowa, twierdzenie Rademachera.
- Słabe rozwiązania równań eliptycznych drugiego rzędu: lemat Laxa-Milgrama.
- Podstawowe pojęcia teorii dystrybucji.

## 6. Topologia

- Metody wprowadzania topologii.
- Domknięcie oraz wnętrze zbioru. Zbiory gęste, nigdziegęste.
- Podprzestrzeń. Topologia dziedziczona.
- Aksjomaty oddzielania.
- Odwzorowania ciągłe, homeomorfizmy.
- Przestrzenie ilorazowe i odwzorowania ilorazowe.
- Twierdzenia metryzacyjne.
- Parazwartość przestrzeni. Parazwartość przestrzeni metryzowalnych.
- Iloczyny kartezjańskie przestrzeni topologicznych.
- Zwartość przestrzeni topologicznych, charakteryzacja zwartości w przestrzeniach metrycznych.
- Topologiczna charakteryzacja zbioru Cantora.
- Twierdzenie Tichonowa o zwartości. Przestrzeń uniwersalna dla przestrzeni Tichonowa wagi $\kappa$.
- Niezmienniki kardynalne w przestrzeniach topologicznych: waga przestrzeni, charakter przestrzeni, charakter w punkcie, liczba Suslina, liczba Lindelöfa, gęstość przestrzeni.
- Przestrzenie metryczne zupełne, twierdzenie Cantora.

- Zupełność w sensie Čecha, twierdzenie Baire'a o kategorii.
- Przestrzenie spójne.

**English version**

## 1. Algebra

- Group theory: groups, subgroups, group homomorphisms, normal subgroups, quotient groups, isomorphism theorems, classical examples of groups, permutation groups.
- Ring theory: rings, subrings, ideals, principal ideals, prime and maximal ideals, integral domains, Euclidean rings and principal ideal domains, unique factorization domains, local rings and localization at an ideal, polynomial rings.
- Field theory: fields and subfields, field extensions, finite and algebraic extensions, algebraic elements, minimal polynomial of an algebraic element, splitting field of a polynomial, algebraically closed fields, finite fields, multiplicative group of a finite field.
- Linear algebra: modules and submodules, quotient modules, module homomorphisms, free modules and vector spaces, basis, rank of a module and dimension of a vector space, projective modules, eigenvalues and eigenvectors, determinant and characteristic polynomial.
- Homological algebra: module complexes and exact sequences, chain modules, boundary homomorphisms, boundary and cycle modules, homology modules.

## 2. Functional analysis

- Normed spaces and Banach spaces, examples.
- Linear operators in normed spaces, continuous linear functionals, norm in the space $L(X, Y)$. Dual normed space.
- The Hahn-Banach theorem and its consequences.
- Open mapping theorem, closed graph theorem. Banach-Steinhaus theorem.
- Inner product spaces and Hilbert spaces, examples. Parallelogram law, Cauchy-Schwarz inequality.
- Orthogonality and orthogonal projection. Orthogonal projection on a convex set. Orthogonal complement.
- The Riesz representation theorem for continuous linear functionals in Hilbert space. Dual space.
- Orthogonal systems and Fourier series in Hilbert spaces. The trigonometric system and its completeness.

## 3. Computational mathematics

- Polynomial arithmetic: fast multiplication algorithms, polynomial division and pseudo-division, the Euclidean algorithm and its variants, Bézout's identity.
- Matrix algorithms: fast matrix multiplication, finding eigenvalues and eigenvectors, diagonalization and its application to matrix exponentiation, fast determinant calculation, division-free determinant algorithms.
- Square-free factorization of polynomials and its applications, symbolic integration of rational functions.
- Estimation and isolation of polynomial roots: upper and lower bounds for polynomial roots (e.g., Cauchy's bounds, Hong's bound, Laguerre–Samuelson theorem), Sturm's theorem, Descartes' rule of signs.

- Explicit formulas for the roots of low-degree polynomials, Abel–Ruffini theorem.
- Polynomial root approximation: bisection and Newton–Raphson methods, other approximation methods (e.g., regula falsi, secant, Laguerre's methods, QIR algorithm).
- The resultant of two polynomials, Sylvester's formula, connection to the Euclidean algorithm, the relationship between the resultant and the associated matrix, elimination and extension theorems.
- Discriminant of a univariate polynomial.
- Gröbner bases: monomial orders, $S$-polynomials and Buchberger's criterion, Buchberger's algorithm, minimal and reduced Gröbner bases, elimination using Gröbner bases.

## 4. Theory of probability

- Elements of combinatorics.
- Axioms of a probability space.
- Classical and geometric probability models.
- Conditional probability, the law of total probability, Bayes' formula.
- Independence of events and families of events, the Borel–Cantelli lemma, Kolmogorov's 0–1 law.
- Random variables, their distributions, cumulative distribution functions and probability densities, examples of discrete and continuous distributions.
- Numerical characteristics of random variables: expectation, variance, standard deviation, moments.
- Generating functions and their applications.
- Probabilistic inequalities: Markov's, Chebyshev–Bienaymé's, and Hölder's inequalities.
- Random vectors, multivariate distributions, marginal distributions, independence of random variables.
- Covariance, covariance matrix, correlation coefficient.
- Multivariate normal distribution.
- Characteristic function and its properties.
- Modes of convergence of random variables: almost sure convergence, convergence in probability, convergence in distribution, and the relationships between them.
- The relationship between convergence in distribution and pointwise convergence of characteristic functions.
- Limit theorems: the central limit theorem, laws of large numbers.
- Conditional expectation.
- Discrete-time martingales.
- Discrete-time Markov chains.

## 5. Differential Equations

- Existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem: Peano's, Picard's, Cauchy's theorems, Euler's method, method of successive approximations. Dependence on initial data and parameters, solutions defined on the maximal interval of existence. Cauchy-Kovalevskaya theorem for partial differential equations.
- Systems of linear first order ODEs: fundamental solutions, Liouville's formula, variation of constants formula, systems with constant coefficients.
- Linear higher order ODEs.

- Critical points of autonomous systems: Lyapunov stability, planar phase portraits, Grobman-Hartman theorem, Lyapunov stability criteria.
- Elliptic equations: Laplace's equation, fundamental solution, harmonic functions, maximum principles and uniqueness of solutions for the Dirichlet problem, Harnack's inequality, Poisson's equation, Green's representation formula, Poisson's formula for a ball, eigenvalues of symmetric elliptic operators.
- Parabolic equations: heat equation, fundamental solution, solution of the initial-value problem, maximum principle and uniqueness of solutions for the Dirichlet problem, separation of variables, Fourier transform.
- Hyperbolic equations: wave equation, d'Alembert's formula, Kirchhoff's formula.
- Sobolev spaces: weak derivatives, Poincaré's, Gagliardo-Nirenberg and Morrey's inequalities, Sobolev embeddings, Rellich-Kondrachov theorem, Rademacher's theorem.
- Weak solutions of second order elliptic equations: Lax-Milgram lemma.
- Basic notions of distribution theory.

## 6. Topology

- Methods of generating topologies.
- Closure and interior of a set. Dense sets, nowhere dense sets.
- Subspace. Induced topology.
- Separation axioms.
- Continuous mappings, homeomorphisms.
- Quotient spaces and quotient mappings.
- Metrization theorems.
- Paracompact spaces. Paracompactness of metrizable spaces.
- Cartesian product of topological spaces.
- Compactness of topological spaces, characterization of compactness in metric spaces.
- Topological characterization of the Cantor set.
- Tychonoff's theorem. The universal space for all Tychonoff spaces of weight $\kappa$.
- Cardinal invariants in topological spaces: the weight of a space, the character of a space, the character at a point, the Suslin number, the Lindelöf number, the density of a space.
- Complete metric spaces, Cantor's theorem.
- Čech complete spaces, Baire's category theorem.
- Connected spaces.